

Bishop Çatısından Elde Edilen $t_{\alpha}\zeta_1^{\alpha}$ -Smarandache Eğri Tabanlı Regle Yüzeyler

Esra DAMAR^{1*}

¹Hitit Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Motorlu Araçlar ve Ulaştırma Teknolojileri Bölümü, Çorum, Türkiye

¹<https://orcid.org/0000-0002-0743-8545>

*Sorumlu yazar: esradamar@hitit.edu.tr

Araştırma Makalesi

ÖZ

Makale Tarihçesi:

Geliş tarihi: 28.07.2025

Kabul tarihi:13.08.2025

Online Yayınlanma:12.09.2025

Anahtar Kelimeler:

Bishop çatısı

Adjoint eğri

Regle yüzey

Smarandache eğri

Açılabilir yüzey

Bu çalışmada, doğrultmanları Smarandache türü eğrilerden oluşan birim vektörlerle tanımlanan bir regle yüzey sınıfı incelenmiştir. Söz konusu yüzeylerin dayanak eğrisi, Bishop çatısı altında tanımlanan teğet vektör ile birinci Bishop vektörünün birleşimiyle elde edilen bir Smarandache eğrisinin integrali yoluyla tanımlanan adjoint eğri olarak alınmıştır. Bu yüzeyler için Gauss ve ortalama eğriliklerin kapalı formda ifadeleri elde edilmiş; ayrıca temel geometrik özellikleri ayrıntılı biçimde analiz edilmiştir. Çalışmada, yüzeylerin hangi koşullar altında açılabilir, minimal ya da tekil olacağı da detaylı olarak incelenmiştir. Bununla birlikte, yüzey üzerindeki bazı parametrik eğrilerin geodezik ve asimptotik karakterleri değerlendirilmiş ve bu davranışların sağlanması için gerekli ve yeterli koşullar belirlenmiştir.

Ruled Surfaces with $t_{\alpha}\zeta_1^{\alpha}$ -Smarandache Base Curve Derived from the Bishop Frame

Research Article

ABSTRACT

Article History:

Received: 28.07.2025

Accepted: 13.08.2025

Available online:12.09.2025

Keywords:

Bishop frame

Adjoint curve

Ruled surface

Smarandache curve

Developable surface

In this study, a class of ruled surfaces defined by unit vector fields whose rulings consist of Smarandache-type curves has been investigated. The base curve of these surfaces is taken as the adjoint curve, which is obtained by integrating a Smarandache curve constructed through the combination of the tangent vector and the first Bishop vector defined in the context of the Bishop frame. Closed-form expressions for the Gauss and mean curvatures of the surfaces have been derived, and their fundamental geometric properties have been analyzed in detail. The study also examines the conditions under which these surfaces become developable, minimal, or singular. Moreover, the geodesic and asymptotic behaviors of certain parametric curves on the surface are evaluated, and the necessary and sufficient conditions for these properties are determined.

To Cite: Damar E., 2025. Bishop çatısından elde edilen $t_{\alpha}\zeta_1^{\alpha}$ -Smarandache eğri tabanlı regle yüzeyler. Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi, 5(2): 343-369.

Giriş

Diferensiyel geometri alanında, eğri ve yüzeylerin yapısını incelemek, uzayın geometrik özelliklerini analiz etmek açısından büyük önem taşır. Eğrilerin yerel davranışlarını tanımlamak için yaygın olarak kullanılan klasik Frenet çatısı, eğriliğin sıfır olduğu noktalarda tanımsız olabilmektedir. Bu sınırlamayı aşmak amacıyla Bishop, eğrilik sıfır olduğunda bile tanımlı

olabilen alternatif bir çatı sistemi önermiştir. 3-boyutlu Öklid uzayında paralel çatının (Bishop çatı) avantajları ve Frenet çatısı ile karşılaştırılması Bishop'un orijinal çalışmasında sunulmuştur (Bishop, 1975).

Regle yüzeyler, bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesiyle oluşturulan geometrik yapılar olup, diferensiyel geometri literatüründe kapsamlı şekilde incelenmiştir. Bu yüzeyler, yapısını belirleyen ve “doğrultman” adı verilen bir doğru ailesinden oluşur (Do Carmo, 2016). Sahip oldukları kendine özgü geometrik özellikler sayesinde, mimari form tasarımı ve geometrik yüzey modelleme gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır (Ali ve ark., 2013; Yılmaz ve ark., 2017). Uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan iki önemli regle yüzey türü, açılabilir (developable) yüzeyler ve minimal yüzeylerdir. Bu yüzey tiplerine ilişkin detaylı çalışmalar literatürde bulunmaktadır (Köse, 1999; Izumiya, 2004; Alegre ve ark., 2010; Güler, 2021). Son yıllarda, hem Öklid hem de Lorentz uzaylarında alternatif hareketli çatılar kullanılarak yeni regle yüzeylerin inşasına yönelik çeşitli araştırmalar yapılmıştır (Yüksel, 2013; Damar, 2017; Karacan ve ark., 2017; Şenyurt ve ark., 2023a; Şenyurt ve ark., 2023b; Uzun ve ark., 2024).

Smarandache eğrileri, diferensiyel geometri kapsamında incelenen özel eğri türlerinden biridir. İlk olarak Minkowski uzayında tanımlanan bu eğriler, verilen bir temel eğrinin hareketli çatı vektörleri örneğin teğet, normal ve binormal kullanılarak elde edilen konum vektörleri ile tanımlanır (Turgut ve Yılmaz, 2008). Zamanla Öklid uzayına da adapte edilmiş ve kinematik, robotik ve teorik fizik gibi birçok alanda uygulama potansiyeli göstermiştir (Ali, 2010; Nurkan ve Güven, 2022; Canlı ve ark., 2024; Kalkan ve Şenyurt, 2024; Mendonca, 2024; Şenyurt ve ark., 2024).

Çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, konuya ilişkin literatür hakkında bilgi verilmiştir. Ön bilgiler kısmında ise, çalışma boyunca kullanılacak temel kavramlara yer verilmiştir. Bulgular bölümünde, Damar (2025) çalışmasında, daha önce Damar (2024) tarafından tanımlanan $\zeta_1^\alpha \zeta_2^\alpha$ tipi Bishop adjoint eğrisini taban eğri olarak seçmiş ve bu eğri aracılığıyla oluşturulan regle yüzeylerin geometrik özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmada ise, yine Damar (2024)'te tanımlanan $t_\alpha \zeta_1^\alpha$ tipi Bishop adjoint eğrisi taban eğri olarak seçilmiştir. Doğrultman yönleri, Smarandache türü eğriler aracılığıyla tanımlanan Bishop çatısının birim vektörleri kullanılarak belirlenmiştir. Bu yöntemle, $M_1(s, v)$ 'den $M_7(s, v)$ 'ye kadar yedi farklı regle yüzey üretilmiş ve bu yüzeylerin diferensiyel geometrik özellikleri ayrıntılı biçimde analiz edilmiştir. Çalışma, elde edilen bulguların ve potansiyel gelecekteki araştırma yönlerinin tartışılmasıyla sonlandırılmıştır.

Ön Bilgiler

Öklid uzayı E^3 de tanımlı, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş düzgün bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun. Bu eğriye karşılık gelen Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ ile gösterilsin. α eğrisi birim hızlı olduğundan teğet vektörü $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ şeklinde tanımlanır; eğrilik ise $\kappa = \|\alpha''(s)\|$ olarak hesaplanır. İvme vektörü $\alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ ile ifade edilirken, binormal vektör $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ şeklindedir.

Klasik Frenet formülü, çatı vektörlerinin türevleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde verir:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Burada burulma (torsiyon) $\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ ifadesiyle tanımlanır. Frenet çatısına alternatif olarak kullanılan Bishop çatısı $\{\mathbf{t}, \boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2\}$ ortonormal üçlüsüyle tanımlanır ve türev matrisi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \boldsymbol{\zeta}'_1 \\ \boldsymbol{\zeta}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\zeta}_1 \\ \boldsymbol{\zeta}_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada $k_1(s)$ and $k_2(s)$ ifadeleri Bishop eğrilikleri olarak adlandırılır.

Frenet ve Bishop çatıları arasındaki dönüşüm şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t}, \\ \mathbf{n} &= \cos\theta(s)\boldsymbol{\zeta}_1 + \sin\theta(s)\boldsymbol{\zeta}_2, \\ \mathbf{b} &= -\sin\theta(s)\boldsymbol{\zeta}_1 + \cos\theta(s)\boldsymbol{\zeta}_2. \end{aligned}$$

Buradaki $\theta(s)$, iki sistem arasındaki bağlantıyı kuran açı fonksiyonudur ve $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\theta(s) = \arctan \frac{k_2(s)}{k_1(s)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda torsiyon ve toplam eğrilik

$$\tau(s) = -\frac{d\theta(s)}{ds}, \quad \kappa(s) = \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla açı fonksiyonu

$$\theta = -\int \tau(s)ds + \theta_0$$

şeklindedir. Buna bağlı olarak Bishop eğrilikleri şu eşitliklerle ifade edilir:

$$k_1(s) = \kappa(s)\cos\theta(s), \quad k_2(s) = \kappa(s)\sin\theta(s).$$

Tanım 2.1 (Nurkan ve ark., 2019). α s-yay uzunluğuna göre parametrelenmiş ve burulması sıfırdan farklı olan düzgün bir eğri olsun. $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ bu eğrinin Frenet çatısını göstermek üzere, α eğrisine ait adjoint eğri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\beta(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{b}_\alpha(u)du.$$

Tanım 2.2 (Ali, 2010). α s-yay uzunluğuna göre parametrelenmiş ve burulması sıfırdan farklı olan düzgün bir eğriyi, $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ da α eğrisinin Frenet çatısını gösterebilir. Bu durumda tn , nb ve tnb Smarandache eğrileri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_\alpha + n_\alpha), \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n_\alpha + b_\alpha), \\ \mu &= \frac{1}{\sqrt{3}}(t_\alpha + n_\alpha + b_\alpha).\end{aligned}$$

Tanım 2.3 (Damar, 2024). α s-yay uzunluğuna göre parametrelenmiş düzgün bir eğriyi, $\{t_\alpha, \zeta_1^\alpha, \zeta_2^\alpha, k_1^\alpha, k_2^\alpha\}$ da α eğrisinin Bishop çatısını gösterebilir. Bu durumda $t_\alpha \zeta_1^\alpha$ -Bishop adjoint eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds$$

şeklindedir.

Teorem 2.4 (Damar, 2024). α s-yay uzunluğuna göre parametrelenmiş düzgün bir eğriyi, $\{t_\alpha, \zeta_1^\alpha, \zeta_2^\alpha, k_1^\alpha, k_2^\alpha\}$ da α eğrisinin Bishop çatısını gösterebilir. β , $t_\alpha \zeta_1^\alpha$ -Bishop adjoint eğrisi olmak üzere β eğrisinin Frenet vektör alanları, eğrilik ve burulması (torsiyon)

$$\begin{aligned}t_{\beta_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_\alpha + \zeta_1^\alpha), \\ n_{\beta_1} &= \frac{1}{\sqrt{1+2h^2}}(-ht_\alpha + h\zeta_1^\alpha + \zeta_2^\alpha), \\ b_{\beta_1} &= \frac{1}{\sqrt{1+4h^2}}(t_\alpha - \zeta_1^\alpha + 2h\zeta_2^\alpha), \\ \tau_{\beta_1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}k_2^\alpha - \frac{\sqrt{2}h'}{1+2h^2}, \\ \kappa_{\beta_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}k_2^\alpha \sqrt{1+2h^2}\end{aligned} \tag{1}$$

şeklindedir. Burada $h = \frac{k_1^\alpha}{k_2^\alpha}$ ifadesi Bishop eğriliklerinin oranını tanımlar.

Teorem 2.5 (Damar, 2024). E^3 uzayında s-yay uzunluğuna göre parametrelenmiş düzgün bir eğri α ve bu eğriden üretilen $t_\alpha \zeta_1^\alpha$ -Bishop adjoint eğrisi β olsun. Bu eğrilere ait Bishop çatısı sırasıyla $\{t_\alpha, \zeta_1^\alpha, \zeta_2^\alpha, k_1^\alpha, k_2^\alpha\}$ ve $\{t_\beta, \zeta_1^\beta, \zeta_2^\beta, k_1^\beta, k_2^\beta\}$ olarak verilsin. Bu durumda β eğrisine ait Bishop vektör alanları ve eğrilikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}\zeta_1^\beta &= \frac{1}{\sqrt{2+4h^2}}[-(\sqrt{2}h\cos\theta_\beta + \sin\theta_\beta)t_\alpha + (\sqrt{2}h\cos\theta_\beta + \sin\theta_\beta)\zeta_1^\alpha + (\sqrt{2}\cos\theta_\beta + 2h\sin\theta_\beta)\zeta_2^\alpha], \\ \zeta_2^\beta &= \frac{1}{\sqrt{2+4h^2}}[-(\sqrt{2}h\sin\theta_\beta + \cos\theta_\beta)t_\alpha + (\sqrt{2}h\sin\theta_\beta - \cos\theta_\beta)\zeta_1^\alpha + (\sqrt{2}\sin\theta_\beta + 2h\cos\theta_\beta)\zeta_2^\alpha], \\ k_1^\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2h^2}\cos\theta_\beta, \quad k_2^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2h^2}\sin\theta_\beta\end{aligned} \tag{3}$$

burada $\theta_\beta = -\int \tau_\beta(s) ds$ dir.

Teorem 2.6 (Bükcü ve Karacan, 2009). $\alpha: I \rightarrow E^3$ Bishop eğrilikleri sıfırdan farklı olan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart, eğrilikler oranı $\frac{k_1}{k_2}$ nin sabit olmasıdır.

Regle yüzey, bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesiyle oluşan özel bir yüzey türüdür. Bu hareket sırasında doğru, her noktada eğriye bağlı olarak yön değiştirir. Böyle bir yüzeyin genel parametrik denklemi şu şekilde ifade edilir:

$$M(s, v) = \alpha(s) + vr(s)$$

burada $\alpha(s)$ dayanak eğriyi (taban eğri), $r(s)$ doğrultman doğrularının yönünü belirleyen birim vektör alanını, v ise her bir doğrultman boyunca olan yer değiştirmeyi gösteren parametreyi ifade eder.

Bu yapı sayesinde, doğrular (doğrultmanlar) $\alpha(s)$ eğrisi boyunca yön değiştirerek yüzeyi oluşturur. Bu yüzeyler, diferensiyel geometri ve uygulamalı alanlarda yaygın olarak incelenmektedir.

$M(s, v)$ regle yüzeyi için birim normal vektör alanı U_M , Gauss eğriliği K_M ve ortalama eğrilik H_M aşağıdaki ifadelerle hesaplanabilir:

$$U_M = \frac{M_s \times M_v}{\|M_s \times M_v\|}, \quad (4)$$

$$K_M = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (5)$$

$$H_M = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \quad (6)$$

bu formüllerde kullanılan birinci temel form katsayıları

$$E = \langle M_s, M_s \rangle, \quad F = \langle M_s, M_v \rangle, \quad G = \langle M_v, M_v \rangle$$

ile, ikinci temel form katsayıları

$$e = \langle M_{ss}, U_M \rangle, \quad f = \langle M_{sv}, U_M \rangle, \quad g = \langle M_{vv}, U_M \rangle$$

ile tanımlanır. Burada $\langle , \rangle$ iç çarpımı, M_s , M_v ise yüzeyin s ve v yönündeki türevlerini ifade eder. Bu ifadeler, yüzeyin eğrilik özelliklerini belirlemede temel araçlardır.

Önerme 2.7 (O'Neill, 1983). Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin her noktasında Gauss eğriliğinin sıfır olmasıdır.

Önerme 2.8 (O'Neill, 1983). Bir düzgün yüzeyin minimal olması için gerek ve yeter koşul ortalama eğriliğinin sıfır olmasıdır.

Bulgular

Damar (2024) çalışmasında, üç boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre tanımlanan Smarandache türü eğrilerin integralini alarak yeni bir eğri ailesi tanıtmıştır. Bu çalışmadan yola çıkılarak, ilgili bölümde $t_\alpha \zeta_1^\alpha$ -tipindeki Bishop adjoint eğri dayanak eğri olarak seçilmiştir. Bu

adjoint eğrinin Bishop çatısından elde edilen birim vektör alanları ise oluşturulacak regle yüzeylerin doğrultman yönleri olarak kullanılmıştır. Bu yaklaşımla inşa edilen yedi farklı regle yüzey, açılabilirlik ve minimal yüzey olma gibi diferensiyel geometrik kriterlere göre analiz edilmiştir.

Tanım 3.1. Üç boyutlu Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı bir eğri olan α eğrisinden elde edilen $t_\alpha \zeta_1^\alpha$ - Bishop adjoint eğrisi β olarak tanımlansın. Bu eğriye ait Bishop çatısı $\{t_\beta, \zeta_1^\beta, \zeta_2^\beta, k_1^\beta, k_2^\beta\}$ ile verilsin. Eğer β eğrisi dayanak eğri olarak alınır ve

$$t_\beta, \zeta_1^\beta, \zeta_2^\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}(t_\beta + \zeta_1^\beta), \frac{1}{\sqrt{2}}(t_\beta + \zeta_2^\beta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_1^\beta + \zeta_2^\beta), \frac{1}{\sqrt{3}}(t_\beta + \zeta_1^\beta + \zeta_2^\beta)$$

vektörleri sırasıyla doğrultman vektörler olarak seçilirse bu doğrultmanlar aracılığıyla elde edilen $M_1(s, v) - M_7(s, v)$ arasındaki yedi farklı regle yüzey aşağıdaki parametrik ifadelerle tanımlanır:

$$M_1(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds + v t_\beta(s),$$

$$M_2(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds + v \zeta_1^\beta(s),$$

$$M_3(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds + v \zeta_2^\beta(s),$$

$$M_4(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds + v \frac{1}{\sqrt{2}}(t_\beta(s) + \zeta_1^\beta(s)),$$

$$M_5(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds + v \frac{1}{\sqrt{2}}(t_\beta(s) + \zeta_2^\beta(s)),$$

$$M_6(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds + v \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_1^\beta(s) + \zeta_2^\beta(s)),$$

$$M_7(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (t_\alpha(s) + \zeta_1^\alpha(s)) ds + v \frac{1}{\sqrt{3}}(t_\beta(s) + \zeta_1^\beta(s) + \zeta_2^\beta(s)).$$

Bu tanımlar Smarandache-türevi doğrultman vektörleriyle oluşturulan yedi farklı regle yüzeyin parametrik biçimde ifadesini sunmakta ve her biri ilgili geometrik analizlerin temelini oluşturmaktadır.

3.1. t_β Doğrultman vektörünün oluşturduğu $M_1(s, v)$ regle yüzeyi

Teorem 3.2.

Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı $M_1(s, v)$ regle yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$K_{M_1} = 0, \quad (7)$$

$$H_{M_1} = \frac{\left(\frac{k_1^\beta}{k_2^\beta}\right)' (k_2^\beta)^2}{2v \left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2\right)^{3/2}}. \quad (8)$$

İspat. $M_1(s, v) = \beta(s) + v\mathbf{t}_\beta(s)$ parametrik denklemi ile verilen yüzeyin s ve v parametrelerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$M_{1s}(s, v) = \mathbf{t}_\beta + vk_1^\beta \zeta_1^\beta + vk_2^\beta \zeta_2^\beta,$$

$$M_{1ss}(s, v) = -v \left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 \right) \mathbf{t}_\beta + \left(k_1^\beta + v(k_1^\beta)' \right) \zeta_1^\beta + \left(k_2^\beta + v(k_2^\beta)' \right) \zeta_2^\beta,$$

$$M_{1v}(s, v) = \mathbf{t}_\beta, \quad M_{1sv}(s, v) = k_1^\beta \zeta_1^\beta + k_2^\beta \zeta_2^\beta, \quad M_{1vv}(s, v) = 0$$

elde edilir. Eşitlik (4)'e göre, $M_1(s, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U_{M_1} = \frac{M_{1s} \times M_{1v}}{\|M_{1s} \times M_{1v}\|} = \frac{k_2}{\sqrt{(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2}} \zeta_1 - \frac{k_1}{\sqrt{(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2}} \zeta_2$$

şeklindedir. Buna göre $M_1(s, v)$ yüzeyinin $E_{M_1}, F_{M_1}, G_{M_1}$ birinci ve $e_{M_1}, f_{M_1}, g_{M_1}$ ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E_{M_1} = \langle M_{1s}, M_{1s} \rangle = 1 + v^2 \left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 \right), \quad F_{M_1} = \langle M_{1s}, M_{1v} \rangle = 1, \quad G_{M_1} = \langle M_{1v}, M_{1v} \rangle = 1,$$

$$e_{M_1} = \langle M_{1ss}, U_{M_1} \rangle = \frac{v \left(k_2^\beta (k_1^\beta)' - k_1^\beta (k_2^\beta)' \right)}{\sqrt{(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2}},$$

$$f_{M_1} = \langle M_{1sv}, U_{M_1} \rangle = 0, \quad g_{M_1} = \langle \Phi_{1vv}, U_{M_1} \rangle = 0$$

bu katsayılar sırasıyla Eşitlik (5) ve (6)'da yerine konulduğunda, Eşitlik (7) ve (8) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikler doğrudan elde edilir.

Teorem 3.2. temel alınarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.3.

$M_1(s, v)$ regle yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

İspat. Eşitlik (7) ile Önerme 2.7 birlikte ele alındığında $M_1(s, v)$ yüzeyinin açılabilir olduğu sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.4 (Damar, 2024).

α eğrisi slant helis olsun. Eğer α eğrisinin ikinci Bishop eğriliği k_2^α sabit ise bu eğrinin adjointi olan β eğrisi de slant helistir.

Sonuç 3.5.

$M_1(s, v)$ yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter koşul β eğrisinin slant helis olmasıdır.

İspat. $M_1(s, v)$ yüzeyinin minimal olması için Eşitlik (8)'den, $H_{M_1} = 0$ olmalıdır. Bu takdirde

$$\left(k_1^\beta(s) \right)' k_2^\beta(s) - \left(k_2^\beta(s) \right)' k_1^\beta(s) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\frac{(k_1^\beta(s))'}{k_1^\beta(s)} = \frac{(k_2^\beta(s))'}{k_2^\beta(s)}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın integrali alındığında

$$\ln|k_1^\beta(s)| = \ln|k_2^\beta(s)| + c_1$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Bu eşitlik sadeleştirildiğinde c_1 sabit olmak üzere

$$k_1^\beta(s) = c_1 \cdot k_2^\beta(s)$$

bulunur. Dolayısıyla minimal yüzey olma koşulu, $\frac{k_1^\beta(s)}{k_2^\beta(s)}$ oranının sabit olması gerektiğini ifade eder. Bu durum Teorem 2.6'ya göre β eğrisinin bir slant helis olduğunu gösterir. Diğer taraftan β slant helis ise $\frac{k_1^\beta(s)}{k_2^\beta(s)}$ oranı sabittir. Buradan $H_{M_1} = 0$ olup yüzey minimaldir.

Teorem 3.6.

$M_1(s, v)$ regle yüzeyi her noktada düzgündür ve herhangi bir tekil nokta içermez.

İspat.

Do Carmo (2016) tarafından verilen tanıma göre, $M_1(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında singüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\|M_{1s} \times M_{1v}\|(s_\theta, v_\theta) = 0$$

olmasıdır. Bu ifadeye karşılık gelen türevler yerine konulduğunda

$$\|M_{1s} \times M_{1v}\|(s_\theta, v_\theta) = \sqrt{(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2} = 0$$

elde edilir. Burada $k_1^\beta \neq 0$ olduğundan

$$\|M_{1s} \times M_{1v}\|(s_\theta, v_\theta) \neq 0$$

dır. Dolayısıyla $M_1(s, v)$ regle yüzeyi tekil nokta içermez.

Teorem 3.7.

$M_1(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin daynak eğrisi β nın slant helis olmasıdır.
- ii) v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

İspat. Bir yüzeyde s -parametre eğrilerin asimptotik olması için gerekli ve yeterli koşul ikinci temel form katsayısı e_{M_1} nin sıfır olmasıdır (Do Carmo, 2016). $M_1(s, v)$ yüzeyi için

$$e_{M_1} = \frac{v(k_2^\beta(k_1^\beta)') - k_1^\beta(k_2^\beta)'}{\sqrt{(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2}} = 0$$

şeklinde hesaplanır. $v \neq 0$ olduğundan $e_{M_1} = 0$ eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$k_2^\beta (k_1^\beta)' - k_1^\beta (k_2^\beta)' = 0$$

olmalıdır. Bu denklemin çözümünden c sabit olmak üzere

$$k_1^\beta = ck_2^\beta$$

elde edilir. Bu ise β eğrisinin slant helis olduğunu gösterir. Diğer taraftan bir yüzeyde v -parametre eğrilerinin asimptotik olması için ikinci temel form katsayısı g sıfır olmalıdır (Do Carmo, 2016). $M_1(s, v)$ yüzeyinde $g_{M_1} = 0$ olarak hesaplandığından $M_1(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

Teorem 3.8

$M_1(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrileri geodezik değildir.
- ii) v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat.

$M_1(s, v)$ yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerinin geodezik olması için

$$U_{M_1} \times M_{1ss} = 0$$

olmalıdır (Do Carmo, 2016). Bu denklemde yüzeyin normal vektörü ve s -parametresine göre ikinci türevi yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_{M_1} \times M_{1ss} = \frac{\left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 + v(k_1^\beta (k_1^\beta)' + k_2^\beta (k_2^\beta)') \right) \mathbf{t}_\beta + \left(k_1^\beta v((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) \right) \zeta_1^\beta + \left(k_2^\beta v((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) \right) \zeta_2^\beta}{\sqrt{(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2}} = 0$$

vektörel ifade elde edilir. Burada

$$\left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 + v(k_1^\beta (k_1^\beta)' + k_2^\beta (k_2^\beta)') \right) \mathbf{t}_\beta + k_1^\beta v((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) \zeta_1^\beta + k_2^\beta v((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) \zeta_2^\beta = 0$$

ifadesinin sıfır vektör olması için her bir bileşenin katsayısı sıfır olmalıdır. Bu ise $v \neq 0$ ve $k_1^\beta \neq 0$ olduğundan sağlanamaz. Bu nedenle s -parametre eğrileri $M_1(s, v)$ yüzeyi üzerinde geodezik değildir.

Ayrıca $U_{M_1} \times M_{1vv} = 0$ eşitliği her zaman sağlandığından $M_1(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

3.2. ζ_1^β Doğrultman vektörünün oluşturduğu $M_2(s, v)$ regle yüzeyi

Teorem 3.9.

Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı $M_2(s, v)$ regle yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$K_{M_2} = 0, \quad (9)$$

$$H_{M_2} = \frac{k_2^\beta}{2(1-vk_1^\beta)}. \quad (10)$$

İspat. $M_2(s, v) = \beta(s) + v\zeta_1^\beta(s)$ parametrik denklemi ile verilen yüzeyin s ve v parametrelerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır

$$\begin{aligned} M_{2s}(s, v) &= (1 - vk_1^\beta) \mathbf{t}_\beta, \quad M_{2v}(s, v) = \zeta_1^\beta, \\ M_{2ss}(s, v) &= -v(k_1^\beta)' \mathbf{t}_\beta + (1 - vk_1^\beta) k_1^\beta \zeta_1^\beta + (1 - vk_1^\beta) k_2^\beta \zeta_2^\beta, \\ M_{2sv}(s, v) &= -k_1^\beta \mathbf{t}_\beta, \quad M_{2vv}(s, v) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik (4)'e göre, $M_2(s, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U_{M_2} = \frac{M_{2s} \times M_{2v}}{\|M_{2s} \times M_{2v}\|} = \zeta_2^\beta$$

şeklindedir. Buna göre $M_2(s, v)$ yüzeyinin $E_{M_2}, F_{M_2}, G_{M_2}$ birinci ve $e_{M_2}, f_{M_2}, g_{M_2}$ ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E_{M_2} &= \langle M_{2s}, M_{2s} \rangle = (1 - vk_1^\beta)^2, \quad F_{M_2} = \langle M_{2s}, M_{2v} \rangle = 0, \quad G_{M_2} = \langle M_{2v}, M_{2v} \rangle = 1, \\ e_{M_2} &= \langle M_{2ss}, U_{M_2} \rangle = (1 - vk_1^\beta) k_2^\beta, \quad f_{M_2} = \langle M_{2sv}, U_{M_2} \rangle = 0, \quad g_{M_2} = \langle M_{2vv}, U_{M_2} \rangle = 0 \end{aligned}$$

bu katsayılar sırasıyla Eşitlik (5) ve (6)'da yerine konulduğunda, Eşitlik (9) ve (10) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikler doğrudan elde edilir.

Teorem 3.9. temel alınarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.10.

$M_2(s, v)$ regle yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

Sonuç 3.11.

β düzlemsel bir eğri ise α eğrisinin eğrilikleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır

$$k_2^\alpha = -\frac{2\left(\frac{k_1^\alpha}{k_2^\alpha}\right)'}{1 + 2\left(\frac{k_1^\alpha}{k_2^\alpha}\right)^2}.$$

İspat.

Kabul edelim ki β düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda $k_2^\beta = 0$ olmalıdır. Eşitlik (3)'ten

$$k_2^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2h^2} \sin \theta_\beta = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\theta_\beta = \int \tau_\beta ds = 0$$

sonucu çıkar. Diğer yandan, Eşitlik (1)'den

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}k_2^\alpha - \frac{\sqrt{2}\left(\frac{k_1^\alpha}{k_2^\alpha}\right)'}{1 + 2\left(\frac{k_1^\alpha}{k_2^\alpha}\right)} = 0$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$k_2^\alpha = -\frac{2\left(\frac{k_1^\alpha}{k_2^\alpha}\right)'}{1 + 2\left(\frac{k_1^\alpha}{k_2^\alpha}\right)^2}$$

sonucu bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.12.

$M_2(s, v)$ yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter koşul β eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat. Kabul edelimki β eğrisi düzlemsel olsun. Bu taktirde $k_2^\beta = 0$ olur. Eşitlik (10)' dan $H_{M_2} = 0$ sonucu elde edilir ve böylece $M_2(s, v)$ yüzeyi minimal olur. Tersine $M_2(s, v)$ yüzeyi minimal olsun bu durumda $H_{M_2} = 0$ olur. Buradan $k_2^\beta = 0$ elde edilir ki bu da β eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

Teorem 3.13.

$M_2(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında tekillik göstermesi için gerek ve yeter koşul

$$k_1^\beta = \frac{1}{v_\theta}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Do Carmo (2016) tarafından verilen tanıma göre, $M_2(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında singüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\|M_{2s} \times M_{2v}\|(s_\theta, v_\theta) = 0$$

olmasıdır. Bu ifadeye karşılık gelen türevler yerine konulduğunda

$$\|M_{2s} \times M_{2v}\|(s_\theta, v_\theta) = (1 - v_\theta k_1^\beta) = 0$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$k_1^\beta = \frac{1}{v_\theta}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.14.

$M_2(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin dayanak eğrisi β nın düzlemsel olmasıdır.
- ii) v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

İspat. $M_2(s, v)$ yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için

$$e_{M_2} = (1 - vk_1^\beta)k_2^\beta = 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. Buradan

$$k_2^\beta = 0 \quad \text{ya da} \quad k_1^\beta = \frac{1}{v}$$

şartlarından en az birinin sağlanması gerekir. Ancak, $k_1^\beta = \frac{1}{v}$ koşulunu sağlayan nokta singüler bir noktadır. Bu nedenle, $k_2^\beta = 0$ alınır ve bu da β eğrisinin düzlemsel olduğunu gösterir. Ayrıca $M_2(s, v)$ yüzeyinde $g_{M_2} = 0$ olarak hesaplandığından $M_2(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

Teorem 3.15.

$M_2(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrileri geodezik değildir.
- ii) v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat. $M_2(s, v)$ regle yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerin geodezik olabilmesi için

$$U_{M_2} \times M_{2ss} = -v(k_1^\beta)' \zeta_1^\beta - (1 - vk_1^\beta)k_1^\beta t_\beta = 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu vektörel ifadenin sıfıra eşit olması

$$-v(k_1^\beta)' = 0, \quad (11)$$

$$(1 - vk_1^\beta)k_1^\beta = 0 \quad (12)$$

denklemlerinin aynı anda sağlanması ile mümkündür. Burada $v \neq 0$ olduğundan Eşitlik (11) $(k_1^\beta)' = 0$ sonucunu verir. Eşitlik (12) den $k_1^\beta \neq 0$ olduğundan $k_1^\beta = \frac{1}{v}$ elde edilir. Ancak, $k_1^\beta = \frac{1}{v}$ koşulunu sağlayan nokta singülerdir. Bu nedenle s -parametre eğrileri geodezik değildir. Buna karşın $U_{M_2} \times M_{2vv} = 0$ eşitliği her zaman sağlandığından $M_2(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

3.3. ζ_2^β doğrultman vektörünün oluşturduğu $M_3(s, v)$ regle yüzeyi

Teorem 3.16.

Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı $M_3(s, v)$ regle yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$K_{M_3} = 0, \quad (13)$$

$$H_{M_3} = \frac{-k_1^\beta}{2(1 - vk_2^\beta)}. \quad (14)$$

İspat. $M_3(s, v) = \beta(s) + v\zeta_2^\beta(s)$ parametrik denklemi ile verilen yüzeyin s ve v parametrelerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır

$$M_{3s}(s, v) = (1 - vk_2^\beta)t_\beta, \quad M_{3v}(s, v) = \zeta_2^\beta,$$

$$M_{3ss}(s, v) = -v(k_2^\beta)'t_\beta + (1 - vk_2^\beta)k_1^\beta\zeta_1^\beta + (1 - vk_2^\beta)k_2^\beta\zeta_2^\beta,$$

$$M_{3sv}(s, v) = -k_2^\beta t_\beta, \quad M_{3vv}(s, v) = 0$$

elde edilir. Eşitlik (4)'e göre, $M_3(s, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U_{M_3} = \frac{M_{3s} \times M_{3v}}{\|M_{3s} \times M_{3v}\|} = -\zeta_1^\beta$$

şeklindedir. Buna göre, $M_3(s, v)$ yüzeyinin $E_{M_3}, F_{M_3}, G_{M_3}$ birinci ve $e_{M_3}, f_{M_3}, g_{M_3}$ ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E_{M_3} &= \langle M_{3s}, M_{3s} \rangle = (1 - vk_2^\beta)^2, F_{M_3} = \langle M_{3s}, M_{3v} \rangle = 0, G_{M_3} = \langle M_{3v}, M_{3v} \rangle = 1, \\ e_{M_3} &= \langle M_{3ss}, U_{M_3} \rangle = -(1 - vk_2^\beta)k_1^\beta, f_{M_3} = \langle M_{3sv}, U_{M_3} \rangle = 0, g_{M_3} = \langle M_{3vv}, U_{M_3} \rangle = 0 \end{aligned}$$

bu katsayılar sırasıyla Eşitlik (5) ve (6)'da yerine konulduğunda, Eşitlik (13) ve (14) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikler doğrudan elde edilir.

Teorem 3.16. temel alınarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.17.

$M_3(s, v)$ regle yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

Sonuç 3.18.

$M_3(s, v)$ regle yüzeyi minimal yüzey değildir.

İspat. Eşitlik (14)'ten yüzeyin minimal olması için $k_1^\beta = 0$ olmalıdır. Ancak Bishop çatısı tanım gereği k_1^β eğriliği sıfırdan farklıdır. Bu durumda $M_3(s, v)$ yüzeyi minimal değildir.

Sonuç 3.19.

$M_3(s, v)$ regle yüzeyi üzerindeki her parametre eğrisi bir eğrilik çizgisidir.

İspat. Do Carmo (2016) numaralı kaynağında verdiği tanıma göre, bir regle yüzey üzerindeki parametre eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul $F = f = 0$ olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 3.20.

$M_3(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında tekillik göstermesi için gerek ve yeter koşul

$$k_2^\beta = \frac{1}{v_\theta}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $M_3(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında singüler olması için gerek ve yeter şart

$$\|M_{3s} \times M_{3v}\|(s_\theta, v_\theta) = 1 - v_\theta k_2^\beta = 0$$

olmasıdır. Bu ifade düzenlenirse

$$k_2^\beta = \frac{1}{v_\theta}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.21.

$M_3(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) s -parametre eğrileri asimptotik değildir.

ii) v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

İspat. $M_3(s, v)$ yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için

$$e_{M_3} = -(1 - vk_2^\beta)k_1^\beta = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan

$$k_1^\beta = 0 \quad \text{ya da} \quad k_2^\beta = \frac{1}{v}$$

şartlarından en az birinin sağlanması gerekir. Ancak $k_2^\beta = \frac{1}{v}$ koşulunu sağlayan nokta singüler bir noktadır. Diğer taraftan tanım gereği $k_1^\beta \neq 0$ dır. Bu nedenle s -parametre eğrileri asimptotik değildir. Buna karşın $M_3(s, v)$ yüzeyinde $g_{M_3} = 0$ olarak hesaplandığından $M_3(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

Teorem 3.22.

$M_3(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) s -parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter koşul β eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

ii) v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat. $M_3(s, v)$ regle yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerin geodezik olabilmesi

$$U_{M_3} \times M_{3ss} = -v(k_2^\beta)' \zeta_1^\beta - (1 - vk_2^\beta)k_2^\beta t_\beta = 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu vektörel ifadenin sıfıra eşit olması

$$-v(k_2^\beta)' = 0, \quad (15)$$

$$(1 - vk_2^\beta)k_2^\beta = 0. \quad (16)$$

denklemlerinin aynı anda sağlanması ile mümkündür. Burada $v \neq 0$ olduğundan Eşitlik (15) $(k_2^\beta)' = 0$ sonucunu verir. Eşitlik (16) dan $k_2^\beta = 0$ ya da $k_2^\beta = \frac{1}{v}$ elde edilir. Ancak $k_2^\beta = \frac{1}{v}$ koşulunu sağlayan nokta singülerdir. Bu nedenle $k_2^\beta = 0$ dır. Bu durumda ise β eğrisi düzlemsel olur. Ayrıca $U_{M_3} \times M_{3vv} = 0$ eşitliği her zaman sağlandığından $M_3(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

3.3. $\frac{1}{\sqrt{2}}(t_\beta + \zeta_1^\beta)$ Doğrultman vektörünün oluşturduğu $M_4(s, v)$ regle yüzeyi

Teorem 3.23.

Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı $M_4(s, v)$ regle yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$K_{M_4} = -\frac{(k_2^\beta)^2}{((\sqrt{2}-vk_1^\beta)^2 + v^2((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) - 1)(v^2(k_2^\beta)^2 + (1-\sqrt{2}vk_1^\beta)^2)}, \quad (17)$$

$$H_{M_4} = \frac{v^2 k_2^\beta \left(2 \left(\frac{k_1^\beta}{k_2^\beta} \right)' k_2^\beta + (2(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) \right) - \sqrt{2}v(2k_1^\beta k_2^\beta - (k_2^\beta)')}{2\sqrt{v^2(k_2^\beta)^2 + (1-\sqrt{2}vk_1^\beta)^2}((\sqrt{2}-vk_1^\beta)^2 + v^2((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) - 1)}. \quad (18)$$

İspat. $M_4(s, v) = \beta(s) + \frac{v}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}_\beta(s) + \boldsymbol{\zeta}_1^\beta(s))$ parametrik denklemleri ile verilen yüzeyin s ve v parametrelerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır

$$\begin{aligned} M_{4s}(s, v) &= \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\right)\mathbf{t}_\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\boldsymbol{\zeta}_1^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}k_2^\beta\boldsymbol{\zeta}_2^\beta, \\ M_{4ss}(s, v) &= -\frac{v}{\sqrt{2}}\left((k_1^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2\right)\mathbf{t}_\beta \\ &+ \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\right)k_1^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}(k_1^\beta)'\right)\boldsymbol{\zeta}_1^\beta + \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\right)k_2^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}(k_2^\beta)'\right)\boldsymbol{\zeta}_2^\beta, \\ M_{4sv}(s, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{t}_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\zeta}_1^\beta, \quad M_{4sv}(s, v) = -\frac{k_1^\beta}{\sqrt{2}}\mathbf{t}_\beta + \frac{k_1^\beta}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\zeta}_1^\beta + \frac{k_2^\beta}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\zeta}_2^\beta, \quad M_{4vv}(s, v) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik (4)'e göre, $M_4(s, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U_{M_4} = \frac{M_{4s} \times M_{4v}}{\|M_{4s} \times M_{4v}\|} = \frac{(-\sqrt{2}vk_2^\beta)\mathbf{t}_\beta + (\sqrt{2}vk_2^\beta)\boldsymbol{\zeta}_1^\beta + (1 - \sqrt{2}vk_1^\beta)\boldsymbol{\zeta}_2^\beta}{2\sqrt{v^2(k_2^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_1^\beta)^2}}$$

şeklinde dir. Buna göre $M_4(s, v)$ yüzeyinin $E_{M_4}, F_{M_4}, G_{M_4}$ birinci ve $e_{M_4}, f_{M_4}, g_{M_4}$ ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\begin{aligned} E_{M_4} &= \langle M_{4s}, M_{4s} \rangle = \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\right)^2 + \frac{v^2}{2}\left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2\right), \\ F_{M_4} &= \langle M_{4s}, M_{4v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad G_{M_4} = \langle M_{4v}, M_{4v} \rangle = 1, \quad e_{M_4} = \langle M_{4ss}, U_{M_4} \rangle = \\ &= \frac{v^2k_2^\beta\left(2\left(\frac{k_1^\beta}{k_2^\beta}\right)'k_2^\beta + 2(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2\right) - \sqrt{2}v(2k_1^\beta k_2^\beta - (k_2^\beta)') + 2k_2^\beta}{2\sqrt{v^2(k_2^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_1^\beta)^2}}, \\ f_{M_4} &= \langle M_{4sv}, U_{M_4} \rangle = \frac{\sqrt{2}k_2^\beta}{2\sqrt{v^2(k_2^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_1^\beta)^2}}, \quad g_{M_4} = \langle M_{4vv}, U_{M_4} \rangle = 0 \end{aligned}$$

bu katsayılar sırasıyla Eşitlik (5) ve (6)'da yerine konulduğunda, Eşitlik (17) ve (18) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikler doğrudan elde edilir.

Teorem 3.23. temel alınarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.24.

$M_4(s, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi β düzlemsel ise, $M_4(s, v)$ yüzeyi hem açılabilir hemde minimal bir yüzeydir.

İspat. Kabul edelim ki β eğrisi düzlemsel olsun, Bu durumda $k_2^\beta = 0$ olur. Diğer taraftan (17) ve (18) numaralı denklemler göz önüne alındığında, terimler yeniden düzenlenip $k_2^\beta = 0$ yerine konulursa

$$2k_2^\beta(k_1^\beta)' - 2k_1^\beta(k_2^\beta)' + k_2^\beta(2(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) - \frac{\sqrt{2}}{v}(2k_1^\beta k_2^\beta - (k_2^\beta)') = 0$$

elde edilir. Bu durumda, $M_4(s, v)$ yüzeyi hem açılabilir hemde minimal bir yüzey olur.

Teorem 3.25.

$M_4(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında tekillik göstermesi için gerek ve yeter koşul

$$v_\theta k_2^\beta = 0 \text{ ve } 1 - \sqrt{2}v_\theta k_1^\beta = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $M_4(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında singüler olması için gerek ve yeter şart

$$\|M_{4s} \times M_{4v}\|(s_\theta, v_\theta) = 0$$

olmasıdır. Bu ifadeye karşılık gelen türevler yerine konulduğunda

$$\|M_{4s} \times M_{4v}\|(s_\theta, v_\theta) = v_\theta^2 (k_2^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v_\theta k_1^\beta)^2 = 0$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$v_\theta k_2^\beta = 0 \text{ ve } 1 - \sqrt{2}v_\theta k_1^\beta = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.26.

$M_4(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) $M_4(s, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi β düzlemsel ise s -parametre eğrileri asimptotiktir.
- ii) v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

İspat. Kabul edelim ki β eğrisi düzlemsel olsun, $M_4(s, v)$ yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için

$$v^2 k_2^\beta \left(2 \left(\frac{k_1^\beta}{k_2^\beta} \right)' k_2^\beta + (2(k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) \right) - \sqrt{2}v (2k_1^\beta k_2^\beta - (k_2^\beta)') + 2k_2^\beta = 0$$

olmalıdır. Burada $v, k_1^\beta \neq 0$ ve $k_2^\beta = 0$ olduğundan s -parametre eğrileri asimptotiktir. Ayrıca $M_4(s, v)$ yüzeyinde $g_{M_4} = 0$ olarak hesaplandığından $M_4(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

Teorem 3.27.

$M_4(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrileri geodezik değildir.
- ii) v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat. $M_4(s, v)$ regle yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerin geodezik olabilmesi

$$U_{M_4} \times M_{4ss} = X_1 t_\beta + Y_1 \zeta_1^\beta + Z_1 \zeta_1^\beta = 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. Burada X_1, Y_1, Z_1 katsayıları aşağıdaki şekildedir:

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}v k_2^\beta \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}} k_1^\beta \right) k_2^\beta - 2(1 - \sqrt{2}v k_1^\beta) \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}} k_1^\beta \right) k_1^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}} (k_1^\beta)' \right) + v^2 k_2^\beta (k_2^\beta)'}{2\sqrt{v^2 (k_2^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v k_1^\beta)^2}}$$

$$Y_1 = \frac{\sqrt{2}vk_2^\beta \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\right)k_2^\beta + v^2k_2^\beta(k_1^\beta)' - \sqrt{2}v(1 - \sqrt{2}vk_1^\beta)\left((k_1^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2\right)}{2\sqrt{v^2(k_2^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_1^\beta)^2}},$$

$$Z_1 = \frac{vk_2^\beta \left(-\sqrt{2}\left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\right)k_1^\beta + vk_2^\beta \left(v(k_1^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2\right) - vk_2^\beta(k_1^\beta)'\right)}{2\sqrt{v^2(k_2^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_1^\beta)^2}}.$$

Yüzeyin geodezik olması için bu katsayıların aynı anda sıfır olması gerekir. Ancak $(1 - \sqrt{2}vk_1^\beta) = 0$ ve $vk_2^\beta = 0$ noktaları singüler nokta olduğu için s-parametre eğrileri geodezik değildir. Buna karşın $U_{M_4} \times M_{4vv} = 0$ eşitliği her zaman sağlandığından $M_4(s, v)$ yüzeyi üzerinde v-parametre eğrileri daima geodeziktir.

3.5. $\frac{1}{\sqrt{2}}(t_\beta(s) + \zeta_2^\beta(s))$ doğrultman vektörünün oluşturduğu $M_5(s, v)$ regle yüzeyi

Teorem 3.28.

Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı $M_5(s, v)$ regle yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$K_{M_5} = -\frac{(k_1^\beta)^2}{((\sqrt{2}-vk_2^\beta)^2 + v^2((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) - 1)(v^2(k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_2^\beta)^2)}, \quad (19)$$

$$H_{M_5} = \frac{-v^2k_1^\beta \left(2\left(\frac{k_2^\beta}{k_1^\beta}\right)'k_1^\beta + 2(k_2^\beta)^2 + (k_1^\beta)^2\right) + \sqrt{2}v(2k_1^\beta k_2^\beta - (k_1^\beta)')}{2\sqrt{v^2(k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_2^\beta)^2}((\sqrt{2}-vk_2^\beta)^2 + v^2((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2) - 1)}. \quad (20)$$

İspat. $M_5(s, v) = \beta(s) + \frac{v}{\sqrt{2}}(t_\beta(s) + \zeta_2^\beta(s))$ parametrik denklemi ile verilen yüzeyin s ve v parametrelerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır

$$M_{5s}(s, v) = \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_2^\beta\right)t_\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}k_1^\beta\zeta_1^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}k_2^\beta\zeta_2^\beta,$$

$$M_{5ss}(s, v) = -\frac{v}{\sqrt{2}}((k_2^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2)t_\beta + \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_2^\beta\right)k_1^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}(k_1^\beta)'\right)\zeta_1^\beta$$

$$+ \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}k_2^\beta\right)k_2^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}}(k_2^\beta)'\right)\zeta_2^\beta,$$

$$M_{5sv}(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}t_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_2^\beta, \quad M_{5sv}(s, v) = -\frac{k_2^\beta}{\sqrt{2}}t_\beta + \frac{k_1^\beta}{\sqrt{2}}\zeta_1^\beta + \frac{k_2^\beta}{\sqrt{2}}\zeta_2^\beta, \quad M_{5vv}(s, v) = 0$$

elde edilir. Eşitlik (4)'e göre, $M_5(s, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U_{M_5} = \frac{\sqrt{2}vk_1^\beta}{2\sqrt{v^2(k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_2^\beta)^2}}t_\beta - \frac{(1 - \sqrt{2}vk_2^\beta)}{\sqrt{v^2(k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_2^\beta)^2}}\zeta_1^\beta - \frac{\sqrt{2}vk_1^\beta}{2\sqrt{v^2(k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}vk_2^\beta)^2}}\zeta_2^\beta$$

şeklinde dir. Buna göre $M_5(s, v)$ yüzeyinin $E_{M_5}, F_{M_5}, G_{M_5}$ birinci ve $e_{M_5}, f_{M_5}, g_{M_5}$ ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
E_{M_5} &= \langle \Phi_{5s}, \Phi_{5s} \rangle = \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}} k_2^\beta\right)^2 + \frac{v^2}{2} \left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2\right), \\
F_{M_5} &= \langle M_{5s}, M_{5v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad G_{M_5} = \langle M_{5v}, M_{5v} \rangle = 1, \\
e_{M_5} &= \langle M_{5ss}, U_{M_5} \rangle = \frac{-v^2 k_1^\beta \left(2 \left(\frac{k_2^\beta}{k_1^\beta}\right)' k_1^\beta + (2(k_2^\beta)^2 + (k_1^\beta)^2)\right) + \sqrt{2}v (2k_1^\beta k_2^\beta - (k_1^\beta)') - 2k_1^\beta}{2\sqrt{v^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v k_2^\beta)^2}}, \\
f_{M_5} &= \langle M_{5sv}, U_{M_5} \rangle = \frac{-\sqrt{2}k_1^\beta}{2\sqrt{v^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v k_2^\beta)^2}}, \quad g_{M_5} = \langle M_{5vv}, U_{M_5} \rangle = 0
\end{aligned}$$

bu katsayılar sırasıyla Eşitlik (5) ve (6)'da yerine konulduğunda, Eşitlik (19) ve (20) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikler doğrudan elde edilir.

Teorem 3.28. temel alınarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.29.

$M_5(s, v)$ regle yüzeyi açılabilir değildir.

Sonuç 3.30.

$M_5(s, v)$ regle yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$-v^2 k_1^\beta \left(2 \left(\frac{k_2^\beta}{k_1^\beta}\right)' k_1^\beta + (2(k_2^\beta)^2 + (k_1^\beta)^2)\right) + \sqrt{2}v (2k_1^\beta k_2^\beta - (k_1^\beta)') = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.31.

$M_5(s, v)$ regle yüzeyi her noktada düzgündür ve herhangi bir tekil nokta içermez.

İspat.

$M_5(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında singüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\|M_{5s} \times M_{5v}\|(s_\theta, v_\theta) = \frac{1}{2} (v_\theta^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v_\theta k_2^\beta)^2) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $v_\theta \neq 0$ ve $k_1^\beta \neq 0$ olduğundan

$$\frac{1}{2} (v_\theta^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v_\theta k_2^\beta)^2) \neq 0$$

dır. Dolayısıyla $M_5(s, v)$ regle yüzeyi tekil nokta içermez.

Teorem 3.32.

$M_5(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter koşul $-v^2 k_1^\beta \left(2 \left(\frac{k_2^\beta}{k_1^\beta}\right)' k_1^\beta + \right.$

$$\left. (2(k_2^\beta)^2 + (k_1^\beta)^2)\right) + \sqrt{2}v (2k_1^\beta k_2^\beta - (k_1^\beta)') - 2k_1^\beta = 0$$

ii) v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

İspat. $M_5(s, v)$ yüzeyi üzerinde s-parametre eğrilerinin asimptotik olması için

$$e_{M_5} = \frac{-v^2 k_1^\beta \left(2 \left(\frac{k_2^\beta}{k_1^\beta} \right)' k_1^\beta + (2(k_2^\beta)^2 + (k_1^\beta)^2) \right) + \sqrt{2}v (2k_1^\beta k_2^\beta - (k_1^\beta)') - 2k_1^\beta}{2\sqrt{v^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v k_2^\beta)^2}} = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradan ispat açıktır. Ayrıca $M_5(s, v)$ yüzeyinde $g_{M_5} = 0$ olarak hesaplandığından $M_5(s, v)$ yüzeyi üzerinde v-parametre eğrileri daima asimptotiktir.

Teorem 3.33.

$M_5(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) s-parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}k_2^\beta}, (k_1^\beta)' = -k_1^\beta k_2^\beta, (k_2^\beta)' = (k_1^\beta)^2 - k_1^\beta k_2^\beta$$

eşitliklerinin aynı anda sağlanmasıdır.

ii) v-parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat. $M_5(s, v)$ regle yüzeyi üzerinde s-parametre eğrilerin geodezik olabilmesi için

$$U_{M_5} \times M_{5ss} = X_1 t_\beta + Y_1 \zeta_1^\beta + Z_1 \zeta_1^\beta = 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. Burada X_1, Y_1, Z_1 katsayıları aşağıdaki şekildedir:

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}v k_1^\beta \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}} k_2^\beta\right) k_1^\beta - 2 \left(1 - \sqrt{2}v k_2^\beta\right) \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}} k_2^\beta\right) k_2^\beta + \frac{v}{\sqrt{2}} (k_2^\beta)' \right) + v^2 k_1^\beta (k_1^\beta)'}{2\sqrt{v^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v k_2^\beta)^2}},$$

$$Y_1 = \frac{-\sqrt{2}v k_1^\beta \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}} k_2^\beta\right) k_2^\beta - v^2 k_1^\beta (k_2^\beta)' + v^2 k_1^\beta \left((k_1^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 \right)}{2\sqrt{v^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v k_2^\beta)^2}},$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2}v k_1^\beta \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}} k_2^\beta\right) k_1^\beta + v^2 k_1^\beta (k_1^\beta)' + \sqrt{2}v (1 - \sqrt{2}v k_2^\beta) \left((k_1^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 \right)}{2\sqrt{v^2 (k_1^\beta)^2 + (1 - \sqrt{2}v k_2^\beta)^2}}.$$

Yüzeyin geodezik olması için bu katsayıların aynı anda sıfır olması gerekir. Paydalar ortaktır ve sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla yalnızca payların sıfır olması gerekir. Bu da ancak

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}k_2^\beta}, (k_1^\beta)' = -k_1^\beta k_2^\beta, (k_2^\beta)' = (k_1^\beta)^2 - k_1^\beta k_2^\beta$$

eşitlikleri sağlandığında mümkündür. Diğer taraftan $U_{M_5} \times M_{5vv} = 0$ eşitliği her zaman sağlandığından $M_5(s, v)$ yüzeyi üzerinde v-parametre eğrileri daima geodeziktir.

3.6. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_1^\beta + \zeta_2^\beta)$ Doğrultman vektörünün oluşturduğu $M_6(s, v)$ regle yüzeyi

Teorem 3.34.

Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı $M_6(s, v)$ regle yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik aşağıdaki ifadelerle verilir

$$K_{M_6} = 0, \quad (21)$$

$$H_{M_6} = \frac{k_2^\beta - k_1^\beta}{2\sqrt{2} - 2v(k_1^\beta + k_2^\beta)}. \quad (22)$$

İspat. $M_6(s, v) = \beta(s) + \frac{v}{\sqrt{2}}(\zeta_1^\beta(s) + \zeta_2^\beta(s))$ parametrik denklemi ile verilen yüzeyin s ve v parametrelerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır

$$M_{6s}(s, v) = \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right) \mathbf{t}_\beta,$$

$$M_{6ss}(s, v) = -\frac{v}{\sqrt{2}}((k_1^\beta)' + (k_2^\beta)') \mathbf{t}_\beta + \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right) k_1^\beta \zeta_1^\beta + \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right) k_2^\beta \zeta_2^\beta,$$

$$M_{6v}(s, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_1^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_2^\beta, \quad M_{6sv}(s, v) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1^\beta + k_2^\beta) \mathbf{t}_\beta, \quad M_{6vv}(s, v) = 0$$

elde edilir. Eşitlik (4)'e göre, $M_4(s, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U_{M_6} = \frac{M_{6s} \times M_{6v}}{\|M_{6s} \times M_{6v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_1^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_2^\beta$$

şeklindedir. Buna göre $M_6(s, v)$ yüzeyinin $E_{M_6}, F_{M_6}, G_{M_6}$ birinci ve $e_{M_6}, f_{M_6}, g_{M_6}$ ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E = \langle M_{6s}, M_{6s} \rangle = \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right)^2,$$

$$F = \langle M_{6s}, M_{6v} \rangle = 0, \quad G = \langle M_{6v}, M_{6v} \rangle = 1,$$

$$e = \langle M_{6ss}, U_{M_6} \rangle = (k_2^\beta - k_1^\beta) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{v}{2}(k_1^\beta + k_2^\beta) \right),$$

$$f = \langle M_{6sv}, U_{M_6} \rangle = 0, \quad g = \langle M_{6vv}, U_{M_6} \rangle = 0,$$

bu katsayılar sırasıyla Eşitlik (5) ve (6)'da yerine konulduğunda, Eşitlik (21) ve (22) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikler doğrudan elde edilir.

Teorem 3.34. temel alınarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.35.

$M_6(s, v)$ regle yüzeyi açılabilir.

Sonuç 3.36.

$M_6(s, v)$ regle yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul $k_1^\beta = k_2^\beta$ olmasıdır.

İspat. $M_6(s, v)$ regle yüzeyi minimal olduğunu kabul edelim. Bu durumda Eşitlik (22)'ye göre ortalama eğrilik şöyle verilir:

$$H_{M_6} = \frac{k_2^\beta - k_1^\beta}{2\sqrt{2} - 2v(k_1^\beta + k_2^\beta)} = 0$$

bu eşitlikten

$$k_2^\beta - k_1^\beta = 0 \Rightarrow k_2^\beta = k_1^\beta$$

elde edilir. Tersine, eğer $k_1^\beta = k_2^\beta$ eşitliği sağlanıyorsa, $H_{M_6} = 0$ olur. Bu durumda yüzey minimal olur.

Sonuç 3.37.

$M_6(s, v)$ regle yüzeyi minimal ise $\theta_\beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $M_6(s, v)$ regle yüzeyi minimal olsun. Bu durumda Sonuç 3.36.' dan $k_2^\beta = k_1^\beta$ dir. Diğer taraftan

$$\theta_\beta = \arctan \frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \arctan(1)$$

olduğundan $\theta_\beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ elde edilir.

Teorem 3.38.

$M_6(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında tekillik göstermesi için gerek ve yeter koşul

$$k_1^\beta + k_2^\beta = \frac{\sqrt{2}}{v_\theta}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $M_6(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında singüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\|M_{6s} \times M_{6v}\|(s_\theta, v_\theta) = 1 - \frac{v_0}{\sqrt{2}}(k_1^\beta + k_2^\beta) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu ifade uygun şekilde düzenlenirse istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.39.

$M_6(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s-parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter koşul $k_1^\beta = k_2^\beta$ eşitliğinin sağlanmasıdır.
- ii) v-parametre eğrileri daima asimptotiktir.

İspat. $M_6(s, v)$ yüzeyi üzerinde s-parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter koşul

$$e = (k_2^\beta - k_1^\beta) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{v}{2}(k_1^\beta + k_2^\beta) \right) = 0$$

olmasıdır. Buradan

$$k_2^\beta = k_1^\beta \text{ ya da } k_1^\beta + k_2^\beta = \frac{\sqrt{2}}{v_0}$$

dir. Burada $k_1^\beta + k_2^\beta = \frac{\sqrt{2}}{v_0}$ yüzey üzerinde singüler nokta olduğundan $k_1^\beta = k_2^\beta$ olmalıdır. Ayrıca $M_6(s, v)$ yüzeyinde $g_{M_6} = 0$ olarak hesaplandığından $M_6(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

Teorem 3.40.

$M_6(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrileri geodezik değildir.
- ii) v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat. $M_6(s, v)$ regle yüzeyi üzerinde s -parametre eğrilerin geodezik olabilmesi için

$$U_{M_6} \times M_{6ss} = \frac{(-\sqrt{2} + v(k_1^\beta + k_2^\beta))(k_1^\beta + k_2^\beta)t_\beta - v((k_1^\beta)' + (k_2^\beta)')\zeta_1^\beta - v((k_1^\beta)' + (k_2^\beta)')\zeta_2^\beta}{2} = 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. Buradan

$$(-\sqrt{2} + v(k_1^\beta + k_2^\beta))(k_1^\beta + k_2^\beta) = 0, \quad ((k_1^\beta)' + (k_2^\beta)') = 0$$

ifadelerinin aynı anda sıfır olması gerekir.

$$(k_1^\beta + k_2^\beta) = \frac{\sqrt{2}}{v}, \quad k_1^\beta = -k_2^\beta + c$$

belirtilen koşulu sağlayan $(k_1^\beta + k_2^\beta) = \frac{\sqrt{2}}{v}$ noktası yüzey üzerinde singüler nokta olduğu için s -parametre eğrileri geodezik değildir. Buna karşın $U_{M_6} \times M_{6vv} = 0$ eşitliği her zaman sağlandığından $M_6(s, v)$ yüzeyi üzerinde v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

3.7. $\frac{1}{\sqrt{3}}(t_\beta + \zeta_1^\beta + \zeta_2^\beta)$ Doğrultman vektörünün oluşturduğu $M_7(s, v)$ regle yüzeyi

Teorem 3.41.

Öklid uzayı E^3 üzerinde tanımlı $M_7(s, v)$ regle yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$K_{M_7} = \frac{(k_2^\beta - k_1^\beta)^2}{3\left(1 - 3\left(1 - \frac{v}{\sqrt{3}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right)^2 + v^2(k_2^\beta)^2 + (k_1^\beta)^2\right)}, \quad (23)$$

$$H_{M_7} = \frac{v^2 \left(\left((k_1^\beta)' + (k_2^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 \right) (k_2^\beta - k_1^\beta) - (k_1^\beta + k_2^\beta) k_1^\beta (k_1^\beta + 2k_2^\beta) + (k_1^\beta)' (k_1^\beta + 2k_2^\beta) \right. \\ \left. + (k_1^\beta + k_2^\beta) k_2^\beta (k_2^\beta + 2k_1^\beta) - (k_2^\beta)' (k_2^\beta + 2k_1^\beta) \right. \\ \left. + \sqrt{3}v \left(2(k_1^\beta - k_2^\beta) + (k_2^\beta)' - (k_1^\beta)' \right) + (k_2^\beta - k_1^\beta) \right)}{6\sqrt{3} \left(1 - \frac{v}{\sqrt{2}}(k_1^\beta + k_2^\beta) \right)^2 - 2\sqrt{3}}. \quad (24)$$

İspat. $M_7(s, v) = \beta(s) + \frac{v}{\sqrt{3}}(t_\beta(s) + \zeta_1^\beta(s) + \zeta_2^\beta(s))$ parametrik denklemi ile verilen yüzeyin s ve v parametrelerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$M_{7s}(s, v) = \left(1 - \frac{v}{\sqrt{3}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right) \mathbf{t}_\beta + \frac{vk_1^\beta}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\zeta}_1^\beta + \frac{vk_2^\beta}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\zeta}_2^\beta,$$

$$M_{7ss}(s, v) = -\frac{v}{\sqrt{3}} \left((k_1^\beta)' + (k_2^\beta)' \right) \mathbf{t}_\beta$$

$$+ \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{3}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right) k_1^\beta + \frac{v}{\sqrt{3}}(k_1^\beta)' \right) \boldsymbol{\zeta}_1^\beta + \left(\left(1 - \frac{v}{\sqrt{3}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right) k_2^\beta + \frac{v}{\sqrt{3}}(k_2^\beta)' \right) \boldsymbol{\zeta}_2^\beta,$$

$$M_{7v}(s, v) = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{t}_\beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\zeta}_1^\beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\zeta}_2^\beta, \quad M_{7sv}(s, v) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(k_1^\beta + k_2^\beta) \mathbf{t}_\beta + \frac{k_1^\beta}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\zeta}_1^\beta + \frac{k_2^\beta}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\zeta}_2^\beta, \quad M_{7vv}(s, v) = 0,$$

elde edilir. Eşitlik (4)'e göre $M_7(s, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U_{M_7} = \frac{v(k_1^\beta - k_2^\beta) \mathbf{t}_\beta + (-\sqrt{3} + v(k_1^\beta + 2k_2^\beta)) \boldsymbol{\zeta}_1^\beta + (\sqrt{3} - v(k_2^\beta + 2k_1^\beta)) \boldsymbol{\zeta}_2^\beta}{\sqrt{v^2(k_1^\beta - k_2^\beta)^2 + (-\sqrt{3} + v(k_1^\beta + 2k_2^\beta))^2 + (\sqrt{3} - v(k_2^\beta + 2k_1^\beta))^2}}$$

şeklinde dir. Buna göre, $M_7(s, v)$ yüzeyinin $E_{M_7}, F_{M_7}, G_{M_7}$ birinci ve $e_{M_7}, f_{M_7}, g_{M_7}$ ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E_{M_7} = \langle M_{7s}, M_{7s} \rangle = \left(1 - \frac{v}{\sqrt{3}}(k_1^\beta + k_2^\beta)\right)^2 + \frac{v^2}{3} \left((k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 \right),$$

$$F_{M_7} = \langle M_{7s}, M_{7v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad G_{M_7} = \langle M_{7v}, M_{7v} \rangle = 1,$$

$$e = \langle M_{7ss}, U_{M_7} \rangle = \frac{-\sqrt{3}v^2 \left((k_1^\beta)' + (k_2^\beta)' + (k_1^\beta)^2 + (k_2^\beta)^2 \right) (k_1^\beta - k_2^\beta) + \left((\sqrt{3} - v(k_1^\beta + k_2^\beta)) k_1^\beta + v(k_1^\beta)' \right) (-\sqrt{3} + v(k_1^\beta + 2k_2^\beta)) + \left((\sqrt{3} - v(k_1^\beta + k_2^\beta)) k_2^\beta + v(k_2^\beta)' \right) (\sqrt{3} - v(k_2^\beta + 2k_1^\beta))}{v^2(k_1^\beta - k_2^\beta)^2 + (-\sqrt{3} + v(k_1^\beta + 2k_2^\beta))^2 + (\sqrt{3} - v(k_2^\beta + 2k_1^\beta))^2},$$

$$f_{M_7} = \langle M_{7sv}, U_{M_7} \rangle = \frac{k_2^\beta - k_1^\beta}{3}, \quad g_{M_7} = \langle M_{7vv}, U_{M_7} \rangle = 0.$$

Bu katsayılar sırasıyla Eşitlik (5) ve (6)'da yerine konulduğunda, Eşitlik (23) ve (24) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikler doğrudan elde edilir.

Teorem 3.41. temel alınarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.42.

$M_7(s, v)$ regle yüzeyi açılabilir regle yüzey olması için gerek ve yeter koşul $k_1^\beta = k_2^\beta$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 3.43.

β eğrisinin eğrilikleri arasında $k_1^\beta = k_2^\beta$ bağıntısı varsa $M_7(s, v)$ regle yüzeyi minimaldir.

İspat. $k_1^\beta = k_2^\beta$ eşitliği Eşitlik (24)'te yerine yazıldığında, $H_{M_7} = 0$ olur. Bu ise yüzeyin minimal olmasıdır.

Teorem 3.44.

$M_7(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında tekillik göstermesi için gerek ve yeter koşul

$$k_1^\beta = k_2^\beta = \frac{\sqrt{3}}{3v_\theta}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $M_7(s, v)$ regle yüzeyinin (s_θ, v_θ) noktasında singüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\|M_{7s} \times M_{7v}\|(s_0, v_0) = \frac{1}{3} \sqrt{v_0^2 (k_1^\beta - k_2^\beta)^2 + (-\sqrt{3} + v_0(k_1^\beta + 2k_2^\beta))^2 + (\sqrt{3} - v_0(k_2^\beta + 2k_1^\beta))^2}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada

$$v_\theta(k_1^\beta - k_2^\beta) = 0, -\sqrt{3} + v_\theta(k_1^\beta + 2k_2^\beta) = 0, \sqrt{3} - v_\theta(k_2^\beta + 2k_1^\beta) = 0$$

dır. Bu ifadeler birlikte düşünülürse

$$k_1^\beta = k_2^\beta = \frac{\sqrt{3}}{3v_\theta}$$

elde edilir.

Teorem 3.45.

$M_7(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrileri asimptotik değildir.
- ii) v -parametre eğrileri daima asimptotiktir.

İspat. Diğer durumlara benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3.46.

$M_7(s, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) s -parametre eğrileri geodezik değildir.
- ii) v -parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat. Diğer durumlara benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışma, Smarandache eğrileri, Bishop çatısı ve regle yüzey teorisini bir araya getirerek yeni bir yüzey sınıfı önermektedir. Klasik Frenet çatısının yetersiz kaldığı durumları aşmak amacıyla, $\mathbf{t}_\alpha \zeta_1^\alpha$ Bishop adjoint eğrisi taban eğri olarak alınmış ve Bishop çatısına göre tanımlanan Smarandache türü doğrultmanlarla regle yüzeyler inşa edilmiştir.

Bu yüzeylerin açılabilirlik, minimallik ve tekillik gibi geometrik özellikleri analiz edilmiş; ayrıca üzerlerindeki parametrik eğrilerin geodezik ve asimptotik davranışları incelenmiştir.

Damar (2025) çalışmasında, dayanak eğri olarak $\zeta_1^\alpha + \zeta_2^\alpha$ bileşiminden elde edilen adjoint eğri alınırken, bu çalışmada dayanak eğri olarak $\mathbf{t}_\alpha + \zeta_1^\alpha$ kombinasyonuna dayalı adjoint eğri kullanılmıştır. Yüzey üretiminde dayanak eğrinin bu şekilde değiştirilmesi, yüzeylerin eğrilik,

minimalite ve geodezik-asimptotik karakteristikleri üzerinde belirgin farklılıklara yol açmıştır. Özellikle açılabilir yüzey ve tekil noktaların sayısında artışlar gözlemlenmiştir.

Elde edilen sonuçlar yalnızca teorik geometri alanına katkı sağlamakla kalmayıp; kinematik, bilgisayarla geometrik modelleme ve fizik gibi uygulamalı alanlarda da yeni potansiyel uygulamalar sunmaktadır.

Gelecek çalışmalarda, önerilen yöntemin farklı çatılar için uygulanabilirliği araştırılabilir. Ayrıca çalışmanın Lorentz-Minkowski uzayına genellenmesi, timelike ve spacelike yüzeylerin analizi açısından yeni perspektifler sağlayabilir. Buna ek olarak, bu tür yüzeylerin sayısal modelleme yöntemleriyle görselleştirilmesi ve fiziksel sistemlere entegrasyonu üzerine uygulamalı çalışmalar da gerçekleştirilebilir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makalenin yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Katkı Beyanı Özeti

Yazar, makalenin tamamı için tek başına sorumluluk beyan eder.

Teşekkür

Bu makaleye yorum ve önerileriyle katkıda bulunan hakemlere teşekkür ederim.

Kaynaklar

Alegre P, Arslan K, Carriazo A, Murathan C, Öztürk G., 2010. Some special types of developable ruled surface. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39: 319-325.

Ali AT., 2010. Special smarandache curves in the Euclidean space. International Journal of Mathematics Combinatorics, 2: 30-36.

Ali AT, Abdel Aziz HS, Sorour AH., 2013. Ruled surfaces generated by some special curves in Euclidean 3-space. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 21: 285–294.

Bishop LR., 1975. There is more than one way to frame a curve. The American Mathematical Monthly, 82: 246–251.

Bükcü B, Karacan MK., 2009. The slant helices according to Bishop frame. International Journal of Computing Science and Mathematics, 3: 67–70.

Canlı D, Şenyurt S, Kaya FE, Grilli L., 2024. The pedal curves generated by alternative frame vectors and their Smarandache curves. Symmetry, 16: 1012.

Damar E, Yüksel N, Vanlı AT., 2017. The ruled surfaces according to type-2 Bishop frame in E^3 . International Mathematical Forum, 12: 133-143.

Damar E., 2024. Adjoint curves of special Smarandache curves with respect to Bishop frame. AIMS Mathematics, 9(12): 35355-35376.

Damar E., 2025. A novel approach to ruled surfaces using adjoint curve. Symmetry, 17(7): 1018.

Do Carmo MP., 2016. Differential geometry of curves and surfaces. Revised and Updated Second Edition; Courier Dover Publications: Mineola, NY, USA.

Güler F., 2021. An approach for designing a developable and minimal ruled surfaces using the curvature theory. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 18: 2150015.

Kalkan ÖB, Şenyurt S., 2024. Osculating type ruled surfaces with type-2 bishop frame in E^3 . Symmetry, 16: 498.

Karacan MK, Yoon DW, Yuksel N., 2017. Classification of some special types ruled surfaces in simply isotropic 3-space. Annals of West University of Timisoara-Mathematics and Computer Science, 55: 87-98.

Köse O., 1999. A method of the determination of a developable ruled surface. Mechanism and Machine Theory, 34(1): 187–193.

Izumiya S, Takeuchi N., 2004. New special curves and developable surfaces. Turkish Journal of Mathematics, 28(2) :153–164.

Nurkan SK, Güven İ., 2022. A new approach for Smarandache curves. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 14: 155–165.

Nurkan SK, Güven İA, Karacan MK., 2019. Characterizations of adjoint curves in Euclidean 3-space. Proceedings of the National Academy of Sciences, 89: 155-161.

Mendonca T, Alan J, Teixeira R., 2024. Smarandache curves of natural curves pairaccording to Frenet frame. Advances Resources, 25: 1-13.

O'Neill B., 1983. Semi-Riemannian geometry. Academic press, New York, NY, USA.

Şenyurt Ş, Canlı D, Çan E, Mazlum SG., 2023a. Another application of Smarandache based ruled surfaces with the Darboux vector according to Frenet frame in E^3 . Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statittics, 72: 880-906.

Senyurt Ş, Mazlum SG, Canli D, Can E., 2023b. Some special Smarandache ruled surfaces according to alternative frame in E^3 . Maejo International Journal of Science and Technology, 17: 138–153.

Şenyurt Ş, Kaya FE, Canlı D., 2024. Pedal curves obtained from Frenet vector of a space curve and Smarandache curves belonging to these curves. AIMS Mathematics, 9: 20136–20162.

Turgut M, Yılmaz S., 2008. Smarandache curves in Minkowski space time. International Journal of Mathematics Combinatorics, 3: 51–55.

Uzun G, Şenyurt S, Akdağ K., 2024. Ruled surfaces with T_1N_1 -Smarandache base curve obtained from the Successor frame. Hagia Sophia Journal of Geometry, 6: 45-68.

Yılmaz B, Ramis CA, Yaylı Y., 2017. On developable ruled surface of the principal-direction curve. Konuralp Journal of Mathematics, 5: 172–180.

Yüksel N., 2013. The ruled surfaces according to Bishop frame in Minkowski 3-space. Abstract and Applied Analysis 1: 810640.