

Kesirli İntegro-Diferansiyel Denklemler için Picard'ın Üç Adımlı İterasyonu Algoritması ile Yakınsaklık ve Veri Bağıllığı

Lale CONA^{1*}

¹Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği, Gümüşhane, Türkiye

¹<https://orcid.org/0000-0002-2744-1960>

*Sorumlu yazar: lalecona@gumushane.edu.tr

Araştırma Makalesi

ÖZ

Makale Tarihçesi:

Geliş tarihi:29.04.2025

Kabul tarihi:14.07.2025

Online Yayınlanma:12.09.2025

Anahtar Kelimeler:

Veri bağıllığı

Kesir mertbe diferansiyel denklem

Sabit nokta teorisi

Picard'ın üç adımlı iterasyonu

Tam sayı olmayan mertebeden türev ve integralleri içeren kesirli hesaplama, bilim ve mühendislikte gerçek dünya problemlerini modellemede yaygın olarak kullanılır. Bu çalışma, Picard'ın üç adımlı iterasyon algoritmasını kullanarak kesirli integro-diferansiyel denklemleri çözmeye odaklanmaktadır. Picard'ın üç adımlı iterasyon algoritmasını çözümlere yaklaşmak için uyguluyoruz ve güçlü bir şekilde yakınsadığını gösteriyoruz. Ayrıca, çözümün veri bağımlılığını da araştırıyoruz. Bu nedenle, Riemann-Liouville kesirli integro-diferansiyel denkleminin çözümüne yaklaşmak ve veri bağımlılığı için yeni sonuçlar sunuyoruz.

Convergence and Data Dependence for Fractional Integro-Differential Equations with Picard's Three-Step Iteration Algorithm

Research Article

ABSTRACT

Article History:

Received: 29.04.2025

Accepted: 14.07.2025

Available online:12.09.2025

Keywords:

Data dependency

Fractional order differential equation

Fixed point theory

Picard's three-step iteration

Fractional calculus, which involves derivatives and integrals of non-integer order, is widely used in modeling real-world problems in science and engineering. This study focuses on solving fractional integro-differential equations using Picard's three-step iteration algorithm. We apply the Picard's three-step iteration algorithm to approximate solutions and show that it converges strongly. We also investigate the data dependence of the solution. Therefore, we present new results for approximating the solution of the Riemann-Liouville fractional integro-differential equation and for data dependence.

To Cite: Cona L., 2025. Kesirli integro-diferansiyel denklemler için Picard'ın üç adımlı iterasyon algoritması ile yakınsaklık ve veri bağıllığı. Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi, 5(2): 278-293.

Giriş

Kesirli analiz, gerçel ya da karmaşık mertebeden türev ve integralleri inceleyen bir matematik dalıdır. Tam sayı olmayan türevler içeren diferansiyel denklemler, pek çok fiziksel olgunun matematiksel modellemesinde temel rol oynar. Dolayısıyla kesirli hesaplama, yalnızca matematiksel açıdan değil; fizik, mühendislik, biyoloji ve finans gibi disiplinler için de

vazgeçilmezdir (Samko ve ark., 1993; Podlubny, 1999; Petras, 2011; Ashyralyev, 2009; 2013a; Ashyralyev ve ark., 2014). Kesirli hesaplamanın öne çıkan bir özelliği, çeşitli kesirli operatörlerin farklı dinamikleri daha gerçekçi biçimde modelleyebilmesidir. Uygulamaya için en iyi operatörün seçilmesi gereksinimi, yeni kesirli operatörlerin geliştirilmesine ve model doğruluğunun sürekli artmasına neden olmuştur (Ashyralyev, 2013b; Baleanu ve ark., 2013; Caputo ve Fabrizio, 2015; Atangana ve Baleanu, 2016; Yang ve ark., 2016).

Öte yandan, sabit nokta teorisi, özellikle diferansiyel, integral ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmede, doğrusal olmayan analizdeki en güçlü araçlardan biridir. Çok sayıda matematiksel uygulamada temel bir rol oynar. Sabit nokta teoremleri, özellikle başlangıç değer ve sınır değer problemlerinde, kesirli diferansiyel denklemler için çözümlerin varlığı ve tekliği konusunda önemli bir yöntemdir. Ancak, bu denklemler için kesin analitik çözümler elde etmek genellikle zordur. Kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için sayısal ve yaklaşık yöntemler üzerinde kapsamlı araştırmalar yürütülmüştür (Baleanu ve ark. 2013; Abbas ve ark. 2022; Cona ve Bal, 2023; Okeke ve ark. 2023; Zivlaei ve Mingarelli, 2024).

Sabit nokta teorisindeki gelişmelere paralel olarak, çok sayıda daralma tipi dönüşüm ortaya kondu. Lipschitzian dönüşümü, daralma dönüşümler, genişlemeyen dönüşümler, sözde daralma dönüşümü, yarı daralma ve zayıf daralma dönüşümü bunlardan bazılarıdır (Banach, 1922; Ishikawa, 1974; Weng, 1991; Gürsoy, 2016; Karakaya ve ark., 2017). Ayrıca, bir çok iterasyon yöntemleri geliştirilmiş ve yaygın olarak kullanılmaktadır. En dikkat çekici iterasyon yöntemlerinden bazıları Mann iterasyon yöntemi (Mann, 1953), Krasnosel'skii iterasyon yöntemi (Krasnosel'skii, 1955), Kirk iterasyon yöntemi (Kirk, 1971), Ishikawa iterasyon yöntemi (Ishikawa, 1974), Noor iterasyon yöntemi (Noor, 2000), S iterasyon yöntemi (Atalan ve ark., 2021), üç adımlı iterasyon yöntemi (Karakaya ve ark., 2017) ve yakın zamanda tanımlanan Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi (Ali ve ark., 2021). Bu yöntemlere ek olarak, bu yaklaşımları birleştiren hibrit iterasyon yöntemlerinin oldukça etkili olduğu kanıtlanmıştır. Bu hibrit yöntemlerden bazıları Kirk-Noor iterasyon yöntemi, Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi Kirk-Mann iterasyon yöntemi, Picard-Mann iterasyon yöntemi, Mann-Picard iterasyon yöntemi, Kirk-MP iterasyon yöntemidir (Rhoades ve Soltuz, 2004; Phuengrattana ve Suantai, 2011; Khan, 2013; Peter ve ark., 2018).

Ayrıca, belirli bir dönüşüm kullanılarak oluşturulan bir iterasyon yönteminde, yaklaşım operatörü olarak bilinen alternatif bir dönüşüm de uygulanabilir. Yaklaşım operatörünün sabit noktası orijinal dönüşümün sabit noktasından farklı olduğundan, ikisi arasında tutarsızlıklar ortaya çıkabilir. Literatürde kapsamlı bir şekilde incelenen veri bağımlılığı kavramı, bu farkın kapsamını

ve nasıl ölçülebileceğini ele alır (Oyedepo ve ark., 2019; Peter, 2020; Adebisi ve ark., 2021; Uwaheren ve ark., 2021; Atalan ve Maldar, 2023; Cona ve Şengul, 2023, 2024; Cona, 2024).

Çalışmanın genel yapısı şu şekildedir: Çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk olarak literatür hakkında genel bilgiler verilmiştir. Ön bilgilerde çalışmamız için önemli olan temel kavramlar sunulmuştur. Bulgularda ise A bir sabit ve $f \in (C[0, A] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ olmak üzere integro-diferansiyel denklem için aşağıdaki başlangıç değer problemi göz önüne alınacaktır

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} + I_{a+}^{\alpha} u(s) = f(s, u(s), u'(s)), \\ 0 < s < A, \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(s) = 0, \quad u'(s) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

İlk olarak, (1) başlangıç değer problemlerinin çözümüne, Ali ve diğerleri tarafından tanıtılan (Ali ve ark., 2021) Picard'ın üç adımlı algoritmasını kullanarak yaklaşılmıştır. Daha sonra, dikkate alınan denklemlerin veri bağımlılığı elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen bulgular için sayısal örnek verilmiştir. Çalışma son olarak bulgularımız ve potansiyel gelecekteki araştırma yönlerinin tartışılmasıyla sonlanmaktadır.

Ön Bilgiler

Çalışma boyunca kullanılan bazı temel tanımları ve ön bilgileri sunuyoruz.

Tanım 2.1. $u(t) \in C([a, b])$ ve $a < t < b$, $\alpha \in (0, \infty)$ olsun. α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, ($\alpha > 0$) olmak üzere

$$I_{a+}^{\alpha} u(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

olarak tanımlıdır.

$\alpha \in (0, 1)$ için α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ise

$$D_{a+}^{\alpha} u(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds,$$

olarak tanımlıdır (Samko ve ark., 1993).

Tanım 2.2. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $d: C^{(1)}[a, b] \rightarrow C^{(1)}[a, b]$,

$$d(u, v) = \max_{s \in [0, A]} |u(s) - v(s)| + \max_{s \in [0, A]} |u'(s) - v'(s)|,$$

olarak tanımlı d bir metriktir. Aynı zamanda $C^{(1)}[a, b] = (C^{(1)}[a, b], d)$ bir tam metrik uzaydır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3. (E, d) bir metrik uzay ve $T: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, v \in E$ için $d(Tu, Tv) \leq Ld(u, v)$ olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne bir Lipschitzian dönüşümü denir (Berinde, 2007).

Tanım 2.4. (E, d) bir metrik uzay ve $T: E \rightarrow E$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $u, v \in E$ için $d(Tu, Tv) \leq \lambda d(u, v)$ olacak şekilde bir $\lambda \in (0, 1)$ sayısı varsa T dönüşümüne bir daralma dönüşümü denir. λ ya ise daralma oranı adı verilir (Berinde, 2007).

Bu tanım E nin normlu uzay olması durumunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir: $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\|Tu - Tv\| \leq \lambda \|u - v\|,$$

ise T dönüşümüne E normlu uzayında bir daralma dönüşümü denir (Berinde, 2007).

Şimdi Banach sabit nokta teoremini ifade edelim (Banach, 1922).

Teorem 2.1. Eğer (E, d) bir tam metrik uzay ve $T: E \rightarrow E$ bir daralma dönüşümü ise,

- i) T nin yalnızca bir sabit noktası $u \in E$ vardır.
- ii) Bir $u_0 \in E$ için $(T^n u_0)$ iterasyon dizisi (yani her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = Tu_{n-1}$ olarak tanımlı (u_n) iterasyon dizisi) T nin bir tek sabit noktasına yakınsar.

Çalışmamızda Picard'ın üç adımlı iterasyon algoritmasını kullanmamızın sebebi, bu algoritmanın Picard, Mann, Ishikawa, Noor, Picard-S, SP, S, CR, M* gibi birçok iterasyon algoritmasından daha hızlı olduğunun kanıtlanmış olmasıdır. Şimdi bu algoritmanın tanımını ifade edelim (Ali ve ark., 2021).

Tanım 2.5. E bir metrik uzay veya Banach uzay, $T: E \rightarrow E$ bir operator olsun. Tahmini başlangıç noktası $u_0 \in E$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{cases} u_{n+1} = Tv_n \\ v_n = Tw_n \\ w_n = Tu_n \end{cases} \quad (2)$$

olarak tanımlı iterasyon, Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi olarak adlandırılır.

Teorem 2.2. f fonksiyonu $D = \{(s, u, v): s \in [0, A]\} \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. (Burada f sınırlı ise her $s \in D$ için $|f(s, u, v)| \leq k$ olacak şekilde $k > 0$ sayısı mevcuttur.) Ayrıca, f fonksiyonu D üzerinde ikinci ve üçüncü argümanlara göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Yani, keyfi $(s, u, z), (s, v, w) \in D$ için

$$|f(s, u, z) - f(s, v, w)| \leq L(|u - v| + |z - w|). \quad (3)$$

olacak şekilde pozitif bir L sabiti vardır. Kabul edelim ki $h(\alpha, A, L) = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + L \frac{A^2}{2}$ olmak üzere

$$h(\alpha, A, L) < 1, \quad (4)$$

olsun. Bu taktirde (1) başlangıç değer probleminin bir tek $u \in C^{(1)}[0, A]$ çözümü vardır (Cona

ve Bal, 2023).

Tanım 2.6. $T_1, T_2: K \rightarrow K$ bir operator. Eğer her $u \in K$ için $\|T_1 u - T_2 v\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sabiti varsa bu taktirde T_2 operatörüne T_1 operatörünün yaklaşım operatörü adı verilir (Şoltuz ve Grosan, 2008).

Lemma 2.1. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi olsun. Ayrıca, $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\gamma_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + \mu_n \gamma_n ,$$

eşitsizliği sağlanır. Bu taktirde, aşağıdaki eşitsizlikte doğrudur:

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n ,$$

(Şoltuz ve Grosan, 2008).

Bulgular

Teorem 3.1. $T: (C^{(1)}[0, A], \|\cdot\|) \rightarrow (C^{(1)}[0, A], \|\cdot\|)$ bir operatör olsun. Bu durumda, Denklem (1) ile verilen integro-differansiyel denkleminin bir tek $u^* \in C[0, A]$ çözümü vardır ve Denklem (2) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi bu u^* çözümüne yakınsar.

İspat. (1) integro-diferansiyel denklemin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$u(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr , \quad (5)$$

denklemini elde ederiz. $T: C^{(1)}[0, A] \rightarrow C^{(1)}[0, A]$ operatörü, (5) integral denklemine denk olarak f, D dikdörtgensel bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere $u = Tu$ olduğundan

$$Tu(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr \quad (6)$$

olarak ifade edilebilir. Denklem (2) ile verilen ve $T: C^{(1)}[0, A] \rightarrow C^{(1)}[0, A]$ operatörü ile oluşturulan iterasyon algoritmasından elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow u_*$ olduğu gösterilecektir. Teorem 2.2 ve Denklem (2) kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_*(t)| &= |Tv_n(t) - Tu_*(t)| \\ &= \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} v_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, v_n(q), v'_n(q)) dq dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_*(t) dt \right) dq dr - \int_0^s \int_0^r f(q, u_*(q), u'_*(q)) dq dr \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} |v_n(t) - u_*(t)| dt dq dr \\
&\quad + \int_0^s \int_0^r |f(q, v_n(q), v'_n(q)) - f(q, u_*(q), u'_*(q))| dq dr \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|v_n - u^*\|_\infty \int_0^s \int_0^r \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} dt dq dr \\
&\quad + \int_0^s \int_0^r L(|v_n(q) - u_*(q)| + |v'_n(q) - u'_*(q)|) dq dr \\
&\leq \left(\frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + L \frac{A^2}{2} \right) \|v_n - u^*\|
\end{aligned}$$

olur. $h(\alpha, A, L) = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + L \frac{A^2}{2}$ olduğundan,

$$\|u_{n+1} - u_*\| \leq h \|v_n - u_*\|, \quad (7)$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılarak aşağıdaki (8) ve (9) eşitsizlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
|v_n(t) - u_*(t)| &= |Tw_n - Tu_*(t)| \\
&= \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} w_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, w_n(q), w'_n(q)) dq dr \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_*(t) dt \right) dq dr - \int_0^s \int_0^r f(q, u_*(q), u'_*(q)) dq dr \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} (w_n(t) - u_*(t)) dt \right) dq dr \right| \\
&\quad + \left| \int_0^s \int_0^r [f(q, w_n(q), w'_n(q)) - f(q, u_*(q), u'_*(q))] dq dr \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|w_n - u^*\|_\infty \left| \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} dt \right) dq dr \right| \\
&\quad + \left| \int_0^s \int_0^r L(|w_n(q) - u_*(q)| + |w'_n(q) - u'_*(q)|) dq dr \right| \\
&\leq \left(\frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + L \frac{A^2}{2} \right) \|w_n - u^*\| \\
&\quad \|v_n - u_*\| \leq h \|w_n - u_*\|. \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|w_n(t) - u_*(t)| &= |Tu_n(t) - Tu_*(t)| \\
&= \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, u_n(q), u'_n(q)) dq dr \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_*(t) dt \right) dq dr - \int_0^s \int_0^r f(q, u_*(q), u'_*(q)) dq dr \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \int_0^q \|u_n - u_*\| dt dq dr + \int_0^s \int_0^r \|f(q, u_n, u'_n) - f(q, u_*, u'_*)\| dq dr \\
&= \left(\frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + L \frac{A^2}{2} \right) \|u_n - u_*\| \\
&= h \|u_n - u_*\|
\end{aligned}$$

$$\|w_n - u_*\| \leq h \|u_n - u_*\|. \quad (9)$$

(8) ve (9) eşitsizlikleri (7) eşitsizliğinde yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\|u_{n+1} - u_*\| \leq h^2 \|u_n - u_*\|$$

$$\|u_n - u_*\| \leq h^2 \|u_{n-1} - u_*\|$$

⋮

$$\|u_1 - u_*\| \leq h^2 \|u_0 - u_*\|.$$

Son eşitsizliğe tümevarım uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\|u_{n+1} - u_*\| \leq h^{2(n+1)} \|u_0 - u_*\|. \quad (10)$$

(10) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alınır, $h < 1$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_*\| = 0$$

elde edilir.

Şimdi, Denklem (1) ile verilen integro-diferansiyel denklemin çözümünün veri bağımlılığını Denklem (2) ile verilen iterasyon algoritmasını kullanarak inceleyelim. Bu nedenle, aşağıdaki ikinci başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi(s)}{ds^2} + I_{a^+}^\alpha \varphi(s) = g(s, x(s), x'(s)), \\ 0 < s < A, \quad 0 < \alpha < 1, \\ \varphi(s) = 0, \quad \varphi'(s) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

(11) integro-diferansiyel denklemin her iki tarafının integrali alınır,

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} x(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r g(q, x(q), x'(q)) dq dr \quad (12)$$

elde edilir. $S: C^{(1)}[0, A] \rightarrow C^{(1)}[0, A]$ operatörü, (12) integral denklemine denk olarak g, D dikdörtgensel bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere $x = Sx$ olduğundan

$$Sx(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} x(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r g(q, x(q), x'(q)) dq dr \quad (13)$$

olarak ifade edilebilir.

Denklem (2) de verilen iterasyon algoritması sırasıyla (6) ve (13) operatörleri ile yeniden oluşturulursa, aşağıdaki iterasyon algoritmaları yazılabilir.

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} v_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r f(q, v_n(q), v'_n(q)) dq dr \\ v_n(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} w_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r f(q, w_n(q), w'_n(q)) dq dr \\ w_n(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r f(q, u_n(q), u'_n(q)) dq dr \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \psi_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r g(q, \psi_n(q), \psi'_n(q)) dq dr \\ \psi_n(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \phi_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r g(q, \phi_n(q), \phi'_n(q)) dq dr \\ \phi_n(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \varphi_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r g(q, \varphi_n(q), \varphi'_n(q)) dq dr \end{cases} \quad (15)$$

Teorem 3.2. Denklem (14) ten elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ dizisini ve Denklem (15) ten elde edilen $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ dizisini göz önüne alalım. (5) ve (12) integral denklemlerinin çözümlerinin sırasıyla u_* ve p olduğunu ve Teorem 3.1'in koşullarının sağlandığını varsayalım. Ayrıca,

i) Her $q \in [0, A]$ için $\|f(q, u_n(q), u'_n(q)) - g(q, \varphi_n(q), \varphi'_n(q))\| \leq \varepsilon_1$ olacak şekilde ε_1 sabit vardır.

ii) $M = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} < 1$

koşulları sağlansın. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \rightarrow u_*$ ve $\varphi_n \rightarrow p$ ise bu takdirde,

$$\|u_* - p\| \leq \frac{3A^2 \varepsilon_1}{2(1-M)},$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 3.2'nin hipotezleriyle aşağıdaki (16), (17) ve (18) eşitsizlikleri elde edilir.

$$\|u_{n+1} - \varphi_{n+1}\| = \|Tv_n - S\psi_n\|$$

$$\begin{aligned} &= \left\| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} v_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r f(q, v_n(q), v'_n(q)) dq dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \psi_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^S \int_0^r g(q, \psi_n(q), \psi'_n(q)) dq dr \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^S \int_0^r \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \|v_n - \psi_n\| dt dq dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^s \int_0^r \|f(q, v_n(q), v'_n(q)) - g(q, \psi_n(q), \psi'_n(q))\| dq dr \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|v_n - \psi_n\| \int_0^s \int_0^r \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} dt dq dr + \int_0^s \int_0^r \varepsilon_1 dq dr \\
& = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \|v_n - \psi_n\| + \varepsilon_1 \frac{A^2}{2} \\
& \|u_{n+1} - \varphi_{n+1}\| \leq M \|v_n - \psi_n\| + \frac{A^2}{2} \varepsilon_1, \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|v_{n+1} - \psi_{n+1}\| = \|Tw_n - S\phi_n\| \\
& + \left\| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} w_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, w_n(q), w'_n(q)) dq dr \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \phi_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r g(q, \phi_n(q), \phi'_n(q)) dq dr \right\| \\
& = \|w_n - \phi_n\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} dt dq dr \\
& + \int_0^s \int_0^r \|f(q, w_n(q), w'_n(q)) - g(q, \phi_n(q), \phi'_n(q))\| dq dr \\
& = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \|w_n - \phi_n\| + \varepsilon_1 \frac{A^2}{2} \\
& \|v_{n+1} - \psi_{n+1}\| \leq M \|w_n - \phi_n\| + \varepsilon_1 \frac{A^2}{2}, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|w_n - \phi_n\| = \|Tu_n - S\varphi_n\| \\
& \leq \left\| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, u_n(q), u'_n(q)) dq dr \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \varphi_n(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r g(q, \varphi_n(q), \varphi'_n(q)) dq dr \right\| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} \|u_n - \varphi_n\| dt dq dr \\
& + \int_0^s \int_0^r \|f(q, u_n(q), u'_n(q)) - g(q, \varphi_n(q), \varphi'_n(q))\| dq dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|u_n - \varphi_n\| \int_0^s \int_0^r \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} dt dq dr + \int_0^s \int_0^r \varepsilon_1 dq dr \\
&= \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \|u_n - \varphi_n\| + \varepsilon_1 \frac{A^2}{2} \\
&\|w_n - \phi_n\| \leq M \|u_n - \varphi_n\| + \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 .
\end{aligned} \tag{18}$$

Şu halde, (18) eşitsizliği (17) eşitsizliğine yazılır ve $M < 1$ kullanılırsa, aşağıdaki eşitsizlik bulunur

$$\begin{aligned}
\|v_n - \psi_n\| &\leq M \left(M \|u_n - \varphi_n\| + \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 \right) + \varepsilon_1 \frac{A^2}{2} . \\
&\leq M^2 \|u_n - \varphi_n\| + M \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \frac{A^2}{2} \\
&\leq M^2 \|u_n - \varphi_n\| + (M+1) \frac{A^2}{2} \varepsilon_1
\end{aligned} \tag{19}$$

Eğer (19) eşitsizliği (16) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - \varphi_{n+1}\| &\leq M \left(M^2 \|u_n - \varphi_n\| + (M+1) \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 \right) + \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 \\
&= M^3 \|u_n - \varphi_n\| + M(M+1) \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 + \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 \\
&\leq M^3 \|u_n - \varphi_n\| + (M^2 + M + 1) \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 \\
&\leq M \|u_n - \varphi_n\| + (M^2 + M + 1) \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 \\
&\leq [1 - (1-M)] \|u_n - \varphi_n\| + \frac{3A^2}{2} \varepsilon_1 \\
&\leq [1 - (1-M)] \|u_n - \varphi_n\| + (1-M) \frac{3A^2}{2(1-M)} \varepsilon_1 \\
\|u_{n+1} - \varphi_{n+1}\| &\leq [1 - (1-M)] \|u_n - \varphi_n\| + (1-M) \frac{3A^2 \varepsilon_1}{2(1-M)},
\end{aligned} \tag{20}$$

bulunur. Son eşitsizlikte,

$$\begin{aligned}
a_n &= \|u_n - \varphi_n\| , \\
\mu_n &= (1-M) \in (0,1) , \\
\gamma_n &= \frac{3A^2 \varepsilon_1}{2(1-M)} \geq 0 .
\end{aligned}$$

olarak alınırsa Lemma 2.1'in koşulları sağlanır. Böylece,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \varphi_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3A^2 \varepsilon_1}{2(1-M)}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow u_*$ ve $\varphi_n \rightarrow p$ olduğundan

$$\|u_* - p\| \leq \frac{3A^2\varepsilon_1}{2(1-M)},$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 3.1: İlk olarak aşağıda verilen başlangıç değer probemini gözönüne alalım:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} + I_{0+}^{\frac{1}{2}} u(s) = \frac{\cos(s)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3} u(s) + u'(s), \\ 0 < s < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Burada (21) başlangıç değer problemi için

$$T: (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|) \rightarrow (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|)$$

$$Tu(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r \left(\frac{\cos(s)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3} u(s) + u'(s) \right) dq dr$$

operatörünü ifade edelim. $L = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{1}{2}, A = 1$ olup

$$\begin{aligned} h(\alpha, A, L) &= \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + L \frac{A^2}{2} \\ &= \frac{1^{\frac{1}{2}+2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3,323} + \frac{1}{6} \cong 0,46 < 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece, Teorem 2.2 den (21) başlangıç değer probleminin çözümü var ve tektir.

Öte yandan,

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} + I_{0+}^{\frac{1}{2}} u(s) = \frac{\sin(s)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3} u(s) + u'(s), \\ 0 < s < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

başlangıç değer probemini gözönüne alalım. Burada (22) başlangıç değer problemi aşağıdaki gibi operatör ile ifade edilebilir.

$$S: (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|) \rightarrow (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|)$$

$$Su(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r \left(\frac{\cos(s)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3} u(s) + u'(s) \right) dq dr$$

Bu taktirde, $L = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{1}{2}, A = 1$ olup $h(\alpha, A, L) < 1$ dir. Dolayısıyla, Teorem 2.2 den (22) başlangıç değeri probleminin çözümü var ve tektir.

Şu halde,

$$\|f(q, u_n(q), u'_n(q)) - g(q, u_n(q), u'_n(q))\| = \left| \frac{\cos(s)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sin(s)}{\sqrt{\pi}} \right| \leq 0,169 = \varepsilon_1$$

$$M = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 3\right)} = \frac{1}{3,323} = 0,3 < 1$$

olup

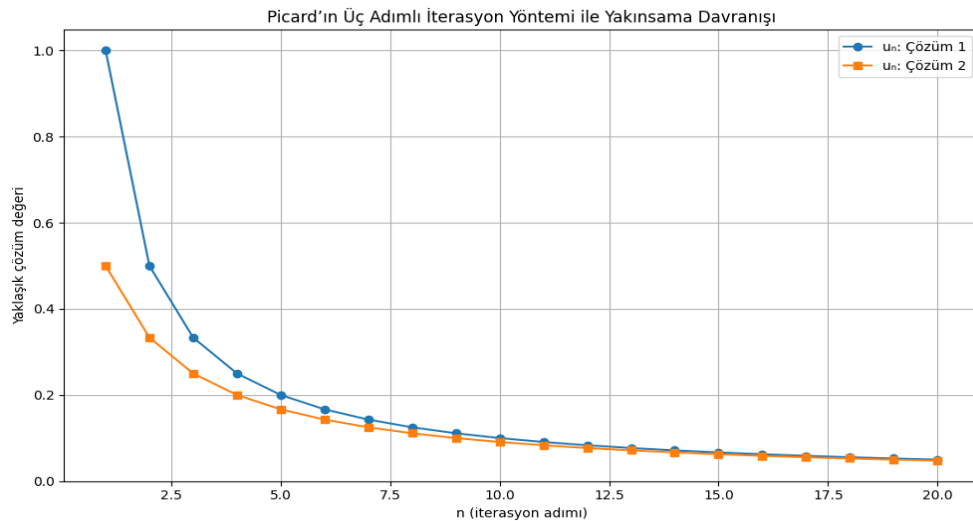
$$\|u_* - p\| \leq \frac{3A^2\varepsilon_1}{2(1-M)} \leq \frac{3 \cdot (0,169)}{1,4} \cong 0,362$$

elde edilir.

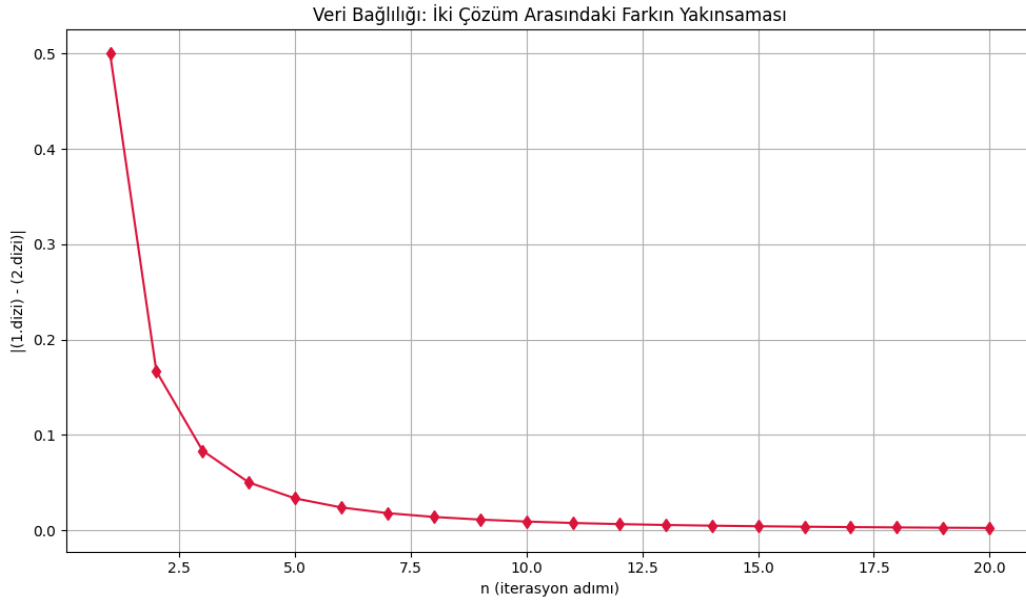
Aşağıda sunulan grafikler, Picard'ın üç adımlı iterasyon algoritmasının yakınsaklık ve veri bağımlılığı özelliklerini görsel olarak ortaya koymaktadır.

◆ Birinci grafik, (21) ve (22) ile verilen başlangıç değeri problemleri için elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırmalı yakınsaklığını göstermektedir. Bu grafik, iterasyon yönteminin her iki denklem için de hızlı ve istikrarlı bir biçimde çözüme yaklaştığını doğrulamaktadır (Şekil 1).

◆ İkinci grafik ise veri bağımlılığına odaklanmaktadır. Bu grafikte, (21) ve (22) denklemleri çok yakın başlangıç verilerine sahip olmasına rağmen, iterasyon sonucunda elde edilen çözümler arasındaki farkın nasıl davrandığı analiz edilmektedir. Yani çözümün başlangıç verilerine duyarlılığını (veri bağımlılığı özelliğini) gözlemlemeyi mümkün kılmaktadır (Şekil 2).



Şekil 1. Başlangıç değeri problemleri için elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırmalı yakınsaklığı



Şekil 2. Veri bağımlılığı

Sonuç

Bu çalışmada, kesirli integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri, Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Literatürde sıkça karşılaşılan yöntemlere kıyasla, Picard'ın üç adımlı iterasyon yönteminin daha hızlı yakınsama sağladığı ve güçlü yakınsaklık özellikleri taşıdığı bilinmektedir. Bulgular, sabit nokta kuramı çerçevesinde geliştirilen bu yöntemin kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde etkin ve güvenilir bir yaklaşım sunduğunu göstermektedir. Yani, yöntemin sabit nokta teorisi çerçevesinde hem teorik hem de sayısal olarak uygulanabilirliğini doğrulamaktadır. Bu yaklaşım, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir alternatif sunmakta ve gelecekteki çalışmalara ışık tutmaktadır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makalenin yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Katkı Beyanı Özeti

Yazar, makalenin tamamı için tek başına sorumluluk beyan eder.

Teşekkür

Bu makaleye yorum ve önerileriyle katkıda bulunan hakemlere teşekkür etmek istiyorum.

Kaynaklar

- Abbas M, Asghar MW, De la Sen M., 2022. Approximation of the solution of delay fractional differential equation using AA-iterative scheme. *Mathematics*, 10: 273.
- Ali F, Ali J, Rodriguez-Lopez R., 2021. Approximation of fixed points and the solution of a nonlinear integral equation. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 26(5): 869-885.
- Ashyralyev A., 2009. A note on fractional derivatives and fractional powers of operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 357: 232-236.
- Ashyralyev A., 2013a. Well-posedness of fractional parabolic equations. *Boundary Value Problems*, 31: 1-18.
- Ashyralyev A., 2013b. Computational mathematics textbook. Shymkent.
- Ashyralyev A, Emirov N, Cakir Z., 2014. Well-posedness of fractional parabolic differential and difference equations with Dirchlet-Neumann condition. *Electronic Journal of Differential Equations*, 97: 1-17.
- Atangana A, Baleanu D., 2016. New fractional derivative with non-local and non-singular kernel. *Thermal Science*, 20(2): 757-763.
- Atalan Y, Gürsoy F, Khan AR., 2021. Convergence of S-iterative method to a solution of Fredholm integral equation and data dependency. *Facta Universitiy*, 4(36): 685-694.
- Atalan Y, Maldar S., 2023. A new note on convergence and data dependence concept for a Volterra integral equation by fixed point iterative algorithm. *Journal of Mathematical Extension*, 17(2): 1-18.
- Adebisi AF, Ojurongbe TA, Okunlola KA, Peter OJ., 2021. Application of Chebyshev polynomial basis function on the solution of Volterra integro-diferential equations using Galerkin method. *Mathematics and Computational Sciences*, 2(1): 41-51.
- Banach S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1): 133-181.
- Berinde V., 2007. Iterative approximation of fixed points. Springer, Berlin.
- Baleanu D, Garra R, Petras I., 2013. A fractional variational approach to the fractional Basset-type equation. *Reports on Mathematical Physics*, 72(1): 57-64.
- Caputo M, Fabrizio M., 2015. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress Fractional Differentiation and Applications*, 1(2): 73-85.
- Cona L, Şengul K., 2023. On data dependency and solutions of nonlinear Fredholm integral equations with the three-step iteration method. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5: 53–64.
- Cona L, Şengul K., 2024. Solutions of linear Fredholm integral equations with the three-step iteration method. *Sigma Journal of Engineering and Natural Science*, 42: 245–251.

Cona L., 2024. Convergence and data dependence results of the nonlinear Volterra integral equation by the Picard's three step iteration. *AIMS Mathematics*, 9(7): 18048-18063.

Cona L, Bal E., 2023. On existence and uniqueness of some fractional order integro-differential equation. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 16(2): 297–310.

Gürsoy F., 2016. A Picard-S iterative method for approximating fixed point of weak-contraction mappings. *Filomat*, 30(10): 2829-2845.

Ishikawa S., 1974. Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1): 147-150.

Karakaya V, Atalan Y, Doğan K, Bouzara NEH., 2017. Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 18(2): 625-640.

Krasnosel'skii MA., 1955. Two comments on the method of successive approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10(1): 123-127.

Kirk WA., 1971. On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces. *Glasgow Mathematical Journal*, 12(1): 6-9.

Khan SH., 2013. A Picard-Mann hybrid iterative process. *Fixed Point Theory and Applications*, 69: 1-10.

Kreyszig E., 1978. *Introductory functional analysis with applications*. John Willey & Sons, New York.

Mann WR., 1953. Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3): 506-510.

Noor MA., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(1): 217-229.

Okeke GA, Udo AV, Alqahtani RT, Alharthi NH., 2023. A faster iterative scheme for solving nonlinear fractional differential equations of the Caputo type. *AIMS Mathematics*, 8(12): 28488–28516.

Oyedepo T, Uwaheren OA, Okperhie EP., 2019. Solution of fractional integro-differential equation using modified homotopy perturbation technique and constructed orthogonal polynomials as basis functions. *ATBU Journal of Science, Technology and Education*, 7(3):157-164.

Petras I., 2011. *Fractional-order nonlinear systems modeling, Analysis and Simulation*. Springer, New York.

Podlubny I., 1999. *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press, New York.

Phuengrattana W, Suantai S., 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(9): 3006-3014.

Peter OJ, Adebisi AF, Oguntolu FA, Bitrus S, Akpan CE., 2018. Multi-step homotopy analysis method for solving Malaria model. *Malaysian Journal of Applied Sciences*, 3(2): 34-45.

Peter OJ., 2020. Transmission dynamics of fractional order Brucellosis model using Caputo-Fabrizio operator. *International Journal of Differential Equations*, 2020, Article ID 2791380, 11 pages.

Rhoades BE, Soltuz SM., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 58(1-2): 219-228.

Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI., 1993. *Fractional integrals and derivatives*. Gordon & Breach, Yverdon.

Şoltuz ŞM, Grosan T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008(1): 1-7.

Uwaheren OA, Adebisi AF, Olotu OT, Etuk MO, Peter OJ., 2021. Legendre Galerkin method for solving fractional integro-differential equations of Fredholm type. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 40(1): 15-27.

Weng X., 1991. Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(3): 727-731.

Yang XJ, Sirivasta HM, Machado JAT., 2016. A new fractional derivatives without singular kernel: application to the modelling of the steady heat flow. *Thermal Science*, 20: 753-756.

Zivlari LG, Mingarelli AB., 2024. Existence and uniqueness of some unconventional fractional Sturm-Liouville equations, *Fractal and Fractional*, 8, 148.